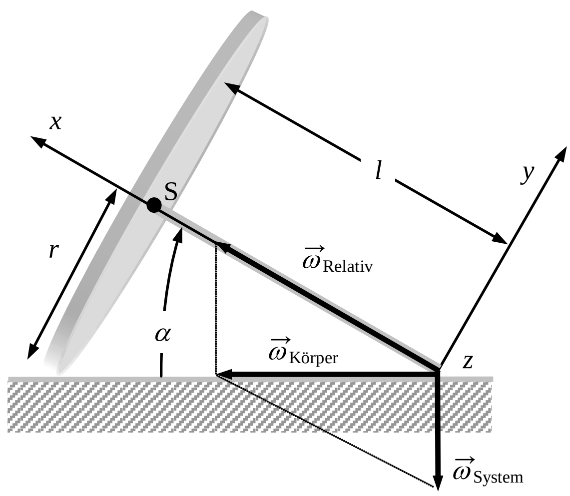
Dynamik

Arbeitsmaterialien zur Vorlesung und Übung
Prof Dr.-Ing.H.Schlingloff



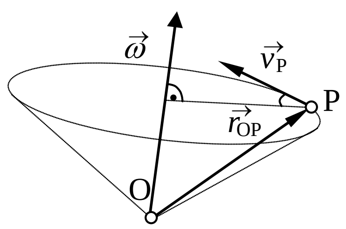
1. Bahnmechanik

1.1 Kinematik

Wenn sich ein Punkt im Raum bewegt, so kann seine aktuelle Position in Relation zu einem bekannten Ort durch den sogenannten Ortsvektor $\vec{r}$ beschrieben werden. Die zeitliche Änderung (Ableitung) dieser aktuellen Position wird dann als Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$ bezeichnet; die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit als Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = d^2\vec{r}/dt^2$. Ist der Bezugspunkt ein fester (nicht bewegter) Punkt im Raum, so spricht man von der Absolutgeschwindigkeit; anderenfalls von der Relativgeschwindigkeit (Geschwindigkeit relativ zum bewegten Ort). Absolutbeschleunigung (oder Inertialbeschleunigung) ist die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit in Relation zu einem nicht beschleunigten Bezugspunkt (also z.B. einem Fixpunkt oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Punkt). Die Absolutbeschleunigung, d.h. die Beschleunigung relativ zum inertialen (nicht beschleunigten) Raum kann durch Trägheitsnavigationsgeräte gemessen werden.

Vektoren sind geeignet, um Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes im dreidimensionalen Raum mathematisch zu beschreiben. Es ist an dieser Stelle wichtig zu betonen, dass Vektoren und Vektorgleichungen unabhängig von Koordinatensystemen sind. Erst, wenn man einen Vektor in Komponenten zerlegen oder eine Vektorgleichung in Komponentenschreibweise darstellen will, muss man sich auf ein (Karthesisches) Koordinatensystem festlegen. In der Kinetik werden dazu neben Inertialensystemen oftmals auch drehbewegte Systeme verwendet. Wenn ein solches Koordinatensystem die räumliche Orientierung seiner Achsen ändert, so hat das selbstverständlich einen Einfluss auf die Koordinatendarstellung eines Vektors. Es sollte aber beachtet werden, dass eine eventuelle Bewegung des Ursprungs des Koordinatensystems keinen Einfluss auf die Koordinatendarstellung eines Vektors hat.

Ändert ein drehbewegtes Koordinatensystem (oder ein starrer Körper) seine Lage im Raum, so kann man einen Winkelgeschwindigkeitsvektor
(oder Drehgeschwindigkeitsvektor) $\vec{\omega}$ definieren:



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP}$$

(bzw bei bewegtem Bezugspunkt: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP} + \vec{v}_O$)

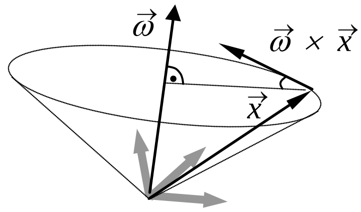
Dabei ist $\vec{r}_{OP}$ der Ortsvektor von einem (normalerweise unbewegten) Punkt O zu einem bewegten Punkt P des Koordinatensystems (oder des Körpers), $\vec{v}_P$ ist die Geschwindigkeit des bewegten Punktes (es gilt die „Korkenzieherregel"). Der Winkelgeschwindigkeitsvektor beschreibt die zeitliche Winkeländerung relativ zum unbewegten Raum, er ist für jeden Punkt des Koordinatensystems (oder des Körpers) gleich und kann inertial (z.B. durch Kreiselgeräte) gemessen werden. Er hat die Dimension 1/sec, natürlich im Bogenmaß.

Oft ist die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ nicht konstant, sondern ändert sich nach Größe und Richtung. Ihre zeitliche Änderung (Winkelbeschleunigung) $\dot{\vec{\omega}}$ kann ebenfalls durch einen Vektor beschrieben werden. Die Drehung selbst dagegen kann nicht als Vektor aufgefasst werden kann: Wenn man die drei Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors zeitlich integriert, so erhält man Größen, die von ihrer Dimension her Lagewinkeln entsprechen, mit denen sich jedoch die korrekte Lage des Koordinatensystems im Allgemeinen nicht ermitteln lässt. Eine Drehung wird mathematisch durch eine Drehmatrix beschrieben.

1.2 Relativbewegungen

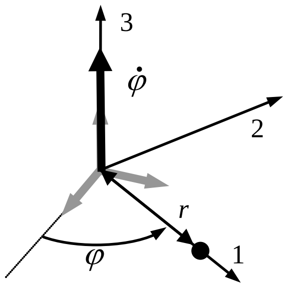
Eine Vektorgleichung gilt unabhängig vom Koordinatensystem, d.h. sie kann in Komponentenform eines jeden beliebigen Karthesischen Koordinatensystems geschrieben werden. Verwendet man jedoch ein drehbewegtes System, so ist zu bedenken, dass man beim Ableiten eines Vektors nach der Zeit durch einfaches Ableiten der Komponenten dieses Vektors für die zeitlichen Änderungen lediglich zeitliche Änderungen relativ zu diesem drehbewegten System erhält. Zur Berechnung der absoluten zeitlichen Änderung des Vektors $\vec{x}$ in Relation zum unbewegten (inertialen) Raum müssen jedoch zusätzlich die Änderungen mit berücksichtigt werden, die von der Drehung des Koordinatensystems herstammen („Führungsänderungen"):

$$d\vec{x}/dt_{\text{Absolut}} = d\vec{x}/dt_{\text{Relativ}} + \vec{\omega} \times \vec{x}$$



Die absolute Änderung ist die relative Änderung plus die Führungsänderung. Die oben stehende kinematische Beziehung ist eine rein geometrische Betrachtung und von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Kinetik. Dabei müssen alle Vektorgrößen in Komponenten des drehbewegten Koordinatensystems geschrieben werden; die Relativänderung wird durch einfaches Ableiten der Komponenten des Vektors nach der Zeit gebildet; und $\vec{\omega}$ ist der Drehgeschwindigkeitsvektor des bewegten Koordinatensystems (natürlich ebenfalls in Komponentenschreibweise des bewegten Systems geschrieben).

Sogenannte „Polarkoordinaten" sind nichts weiter als ein drehbewegtes kartesisches Koordinatensystem. Der Drehwinkel ist φ, die Entfernung auf der 1-Achse ist r. Der Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ liegt auf der raumfesten 3-Achse und hat den Betrag $d\varphi/dt$:



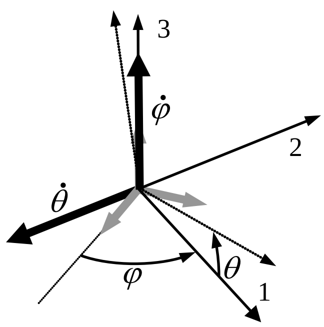
Ortsvektor: $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Geschwindigkeitsvektor: $\begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$

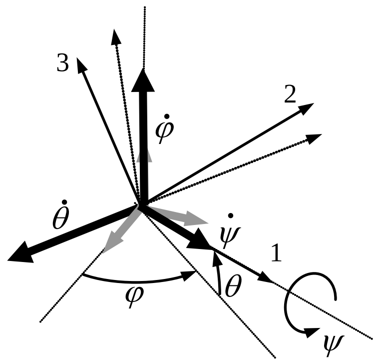
Beschleunigungsvektor: $\begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ r\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$

Spielt bei einer Berechnung der Abstand des Punktes von der 1-2-Ebene ebenfalls eine Rolle („die Höhe h"), so spricht man von „Zylinderkoordinaten" und schreibt für die jeweils dritte Komponente beim Ortsvektor h, beim Geschwindigkeitsvektor $\dot{h}$ und beim Beschleunigungsvektor $\ddot{h}$. Die oben stehenden Notierungen stellen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung relativ zum unbewegten Raum dar, sie sind als Vektoren in einer Komponentenform des drehbewegten Systems geschrieben und verwenden die Größen r und φ (sowie deren zeitliche Ableitungen) für die quantitative Angabe der Komponentenwerte. Verwendet man für eine Berechnung ein drehbewegtes Koordinatensystem, so schreibt man sämtliche Vektoren (und Vektorgleichungen) natürlich in Komponenten ein und desselben (dieses drehbewegten) Systems und benötigt so i.A. kein raumfestes Koordinatensystem. Die Transformation der Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ vom gedrehten in das raumfeste System (Index 0) bzw umgekehrt wird nur gelegentlich einmal gebraucht und geschieht mittels einer Transformationsmatrix:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}_0$$

Wenn das bewegte Koordinatensystem durch zwei Drehungen gegenüber einer raumfesten Orientierung verdreht worden ist, so können zur Lagebeschreibung „Kugelkoordinaten“ verwendet werden. Die Verdrehung erfolgt dabei z.B. zuerst um den Winkel φ um die 3-Achse und anschließend um den Winkel θ um die (negative) 2-Achse:





$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

bzw.:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi} \\ \dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi - \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \end{bmatrix}$$

Der allgemeine Fall der rotatorischen Bewegung eines Koordinatensystems jedoch hat drei Freiheitsgrade. Im allgemeinen Fall kommt man kommt von der Lage eines raumfesten Koordinatensystems zur Lage eines verdrehten Koordinatensystems durch drei aufeinanderfolgende Drehungen um jeweils festgehaltene Achsen. Bei Verwendung der „Kardanwinkel“ z.B. erfolgt die erste Drehung um φ um die 3-Achse, die zweite Drehung um θ um die (negative) 2-Achse und die dritte Drehung um den Winkel ψ um die 1-Achse. Der Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ besteht dann aus drei (nicht aufeinander senkrecht stehenden) Komponenten $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ und $\dot{\psi}$, diese müssen nach den Regeln der Vektorrechnung in die Achsrichtungen des drehbewegten Koordinatensystems zerlegt werden. Sind die Komponenten des Drehgeschwindigkeitsvektors (ω_1 , ω_2 , ω_3) als Funktion der Zeit bekannt, so kann man die Lage des verdrehten Koordinatensystems durch Integration des folgenden Differentialgleichungssystems berechnen:

$$\dot{\varphi} = (\omega_2 \sin\psi + \omega_3 \cos\psi) \,/\, \cos\theta$$

$$\dot{\theta} = -\omega_2 \cos\psi + \omega_3 \sin\psi$$

$$\dot{\psi} = \omega_1 - (\omega_2 \sin\psi + \omega_3 \cos\psi)\cdot\tan\theta$$

Die Umrechnung der Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ vom drehbewegten in das raumfesten System (falls erforderlich) geschieht mit Hilfe der folgenden Drehmatrix:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta & \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\theta \end{bmatrix} \vec{x}$$

Zur Umrechnung der Darstellung vom raumfesten ins drehbewegte System benötigt man die Invertierte der oben stehenden (Dreh-)Matrix; in diesem Fall ist dies einfach die transponierte Matrix (an der Hauptdiagonale gespiegelte Matrix). (Drehmatritzen sind dabei Sonderfälle, i.A. ist das Finden der Invertierten einer Matrix eine komplizierte mathematische Prozedur.)

1.3 Flugbahnen

Der Impuls $\vec{p}$ einer Punktmasse ist einfach ihre Absolutgeschwindigkeit $\vec{v}$ multipliziert mit ihrer Masse m, also $\vec{p} = m\,\vec{v}$. Wie die Geschwindigkeit ist der Impuls eine gerichtete Größe und kann durch einen Vektor beschrieben werden. Der Impulssatz sagt aus, dass die Resultierende aus sämtlichen einwirkenden Kräften $\vec{F}$ gleich der zeitlichen Änderung des Impulses ist, also $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Ist die Masse zeitlich konstant, so ergibt sich $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ (mit $\vec{a}$ als Absolutbeschleunigung relativ zum inertialen Raum).

Die mechanische Energie E ist eine skalare (nicht gerichtete) Größe; für eine sich in einem Kraftfeld bewegenden Punktmasse besteht sie aus kinetischer Energie und potentieller Energie. Dabei ist die kinetische Energie die in der Bewegung gespeicherte „Beschleunigungsarbeit" (also $E_{kin} = ½\, m\, v^2$) ; die potentielle Energie ist die in der Höhe gespeicherte „Anhebearbeit". Aus der potentiellen Energie eines Kraftfeldes läßt sich durch Differentiation nach der Koordinate die Kraft berechnen (im Falle des parallelen Gravitationsfeldes also $E_{pot} = m\, \mathrm{g}\, h$, mit m g als Gravitationskraft und h als Höhe über einem willkürlich festgelegten Nullpotential). Der Energieerhaltungssatz ($E = konstant$) ist manchmal zur Lösung von Problemstellungen besser geeignet als der Impulssatz (z.B. wenn keine mechanische Energie durch Reibung dissipiert wird); er kann aus dem Impulssatz hergeleitet werden und stellt somit kein eigenständiges (zusätzliches) Gesetz der Technischen Mechanik dar.

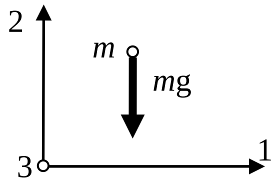
Der Drall $\vec{L}_O$ eines Massepunktes bezüglich eines Fixpunktes O ist das Moment des Impulses, also $\vec{L}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{p}$. Der Drallsatz lautet dann $d\vec{L}_O/dt = \vec{M}_O$, wobei $\vec{M}_O$ das Moment der auf den Massenpunkt einwirkenden Gesamtkraft im Punkt O ist. Der Drallsatz gilt in dieser einfachen Form nur für einen Fixpunkt. Er kann alternativ (bzw. zusätzlich) zum Impulssatz zur Berechnung der Bewegung eines Massepunktes hergenommen werden, wenn sich ein geeigneter Fixpunkt finden lässt.

Die Bewegungsgleichungen für eine Punktmasse lassen sich mit Hilfe von Impuls- und Drallsatz aufstellen (aber nicht nur damit); sie sind geeignet zur Beschreibung der Bahn der Punktmasse in Form von Differentialgleichungen (meist zweiter Ordnung). Die Anzahl der Freiheitsgrade gibt dabei an, wieviele unabhängige Koordinaten zur exakten Lagebeschreibung des Punktes im Raum notwendig sind (also eine, zwei oder drei). Im Allgemeinen stimmt die Anzahl der Freiheitsgrade mit der Zahl der Bewegungs-(Differential-) Gleichungen überein. Zur Berechnung der Bewegung müssen diese Bewegungsgleichungen dann noch „gelöst" werden, d.h. (analytisch oder, wenn das nicht geht, auch numerisch) integriert und an die individuellen Randbedingungen angepasst werden.

Kräfte, welche auf die Punktmasse einwirken, sind entweder konservativer oder nicht konservativer Natur. Konservative Kräfte ändern die mechanische Gesamtenergie nicht und lassen sich aus einem Potentialfeld ableiten; typische Beispiele sind die Gravitationskraft oder die Federkraft (mit c als Federkonstante und x als Abstand von der kraftfreien Auslenkung ergibt sich die Federenergie einer Feder mit linearer Kennlinie z.B. als $E_{Feder} = ½\, c\, x^2$).
Nicht konservative Kräfte ändern die mechanische Gesamtenergie; z.B. die auf einen Flugkörper wirkende Schubkraft oder die Reibungskraft. Bei Bewegungen mit Widerstand könnte z.B. die sog. „Coulombsche Reibung" auftreten (die Reibkraft ist proportional zur Normalkraft), oder aber die sog. „Viskose Reibung" (die Reibkraft ist proportional zur Geschwindigkeit und zeigt in die entgegengesetzte Richtung), oder aber die „Turbulente Reibung" (die Reibkraft ist proportional zur Luftdichte und proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und zeigt in die entgegengesetzte Richtung).

Zur Berechnung von Flugbahnen im parallelen Gravitations- Kraftfeld (Erdbeschleunigung $g = 9.81$ m/s²) ohne Luftwiderstand wird man i.A. ein raumfestes Koordinatensystem wählen, z.B. mit x als Entfernungs-Koordinate und y als Höhenkoordinate. Der Impulssatz liefert dann die Bewegungsgleichung:

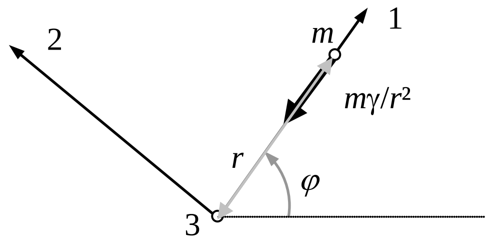
$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$



Die Integration dieser Differentialgleichung ist denkbar einfach: Für die erste Komponente erhält man $\dot{x}$ = konstant und $x(t) = \dot{x} \cdot t + x_0$, mit x_0 als Entfernungskoordinate zum Zeitpunkt $t = 0$; für die zweite Komponente erhält man $\dot{y} = -g \cdot t + \dot{y}_0$ und $y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + \dot{y}_0 \cdot t + y_0$, mit y_0 als Höhenkoordinate und $\dot{y}_0$ als Vertikalgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.
Die Terme $x(t)$ und $y(t)$ definieren die Bahnkurve in Parameterform (mit t als Parameter) als Funktion der Zeit, Elemination der Zeit bringt die bekannte Wurfparabel $y(x)$. Der Energiesatz für die Wurfparabel lautet $E = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m g (y - y_0) = konstant$, er definiert die Geschwindigkeit als Funktion der Höhenkoordinate, liefert jedoch keine Aussage über die Richtung der Geschwindigkeit oder über die Flugzeit.

Für die Berechnung von Bewegungen im zentralsymmetrischen Gravitations-Kraftfeld bietet sich dagegen die Verwendung eines mitbewegten Koordinatensystems an: die 1-Achse zeigt vom Gravitationszentrum immer zum Massepunkt m (Entfernung r, Drehwinkel φ), der Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ liegt auf der raumfesten 3-Achse und hat den Betrag $\dot{\varphi}$.
Die Gravitationskraft ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung $\vec{r} = (r, 0, 0)$ mit γ als Proportionalitätskonstante.

$$m \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ r\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -\gamma/r^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Zwei Integrale für diese Bewegungsgleichungen lassen sich aus Gesetzen der Technischen Mechanik ableiten, nämlich aus der Erhaltung der (massespezifischen) mechanischen Energie E und der Erhaltung des (massespezifischen) Dralls L im Koordinatenursprung:

$$E = \tfrac{1}{2} (\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - \gamma/r = konstant$$
$$L = r\,(r\dot{\varphi}) = konstant$$

Hierbei ist $-\gamma/r$ das Gravitationspotential und $\vec{v} = (\dot{r}\,, r\dot{\varphi}\,, 0\,)$ der Geschwindigkeitsvektor.
Eine weitere Integration ergibt die sog. „Kegelschnitt-Umlaufbahn“ als Lösungskurve:

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{\gamma(\,1+ \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_P)\,)} \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon = \sqrt{2\,\frac{E\,L^2}{\gamma^2} + 1}$$

Dabei bestimmt der Wert der numerischen Exzentrizität ε die Art der Bahnkurve (Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel), die Integrationskonstante φ_P ist der Bahnwinkel des Perizentrums (die geringste Entfernung zum Zentralkörper). Die Berechnung von r und φ als Funktion der Zeit t erfordert eine weitere Integration, welche für die verschieden Werte von ε eine unterschiedliche Form annimmt (die transzendente „Keplergleichung“).

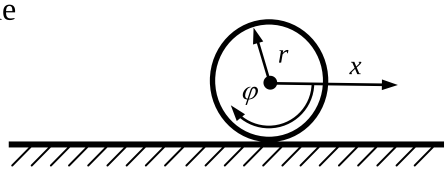
Zur Berechnung der Bahnkurven müssen Bewegungsgleichungen aufgestellt und gelöst werden (d.h. für vorgegebene Anfangsbedingungen integriert werden). In den allermeisten Fällen wird man dabei auf numerische Verfahren angewiesen sein. Bei einigen einfachen Fällen ist eine analytische Lösung möglich, wobei die folgende Tabelle helfen könnte.
Die Symbole x stehen dabei für die Ortskoordinate, v für die Geschwindigkeit, a für die Beschleunigung und t für die Zeit. Der Index 0 kennzeichnet den Anfangszustand.

Nr.	gegeben	gesucht	oder
1	$x(t)$	$v = \dfrac{dx}{dt}$	$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$
2	$v(t)$	$x = x_0 + \int v\,dt$	$a = \dfrac{dv}{dt}$
3	$a(t)$	$x = x_0 + v_0\,t + \int (\int a\,dt)\,dt$	$v = v_0 + \int a\,dt$
4	$v(x)$	$a = v\,\dfrac{dv}{dx}$	$t = t_0 + \int \dfrac{dx}{v}$
5	$a(x)$	$v = \sqrt{2\,(\int a\,dx) + v_0^2}$	$t = t_0 + \int \dfrac{dx}{\sqrt{2\,(\int a\,dx) + v_0^2}}$
6	$t(x)$	$v = \dfrac{1}{dt/dx}$	$a = \dfrac{1}{dt/dx}\,\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{dt/dx}\right]$
7	$x(v)$	$a = \dfrac{v}{dx/dv}$	$t = t_0 + \int \dfrac{1}{v}\,\dfrac{dx}{dv}\,dv$
8	$a(v)$	$x = x_0 + \int \dfrac{v\,dv}{a}$	$t = t_0 + \int \dfrac{dv}{a}$
9	$t(v)$	$x = x_0 + \int v\,\dfrac{dt}{dv}\,dv$	$a = \dfrac{1}{dt/dv}$

2. Ebene Bewegungssysteme

2.1 Kinematische Bindungen

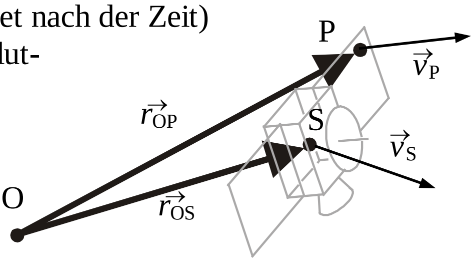
In Analogie zum "Ebenen Kräftesystem" aus der Statik kann man in der Kinetik von einem ebenen Bewegungsystem sprechen, wenn alle Geschwindigkeitsvektoren in der Zeichenebene und alle Drehgeschwindigkeiten senkrecht zur Zeichenebene stehen. Mehrkörpersysteme sind i.A. durch vielfältige Verbindungen (Seile, Federn, Stangen) miteinander gekoppelt, wobei die sog. „Kinematische Beziehungen“ die Zusammenhänge zwischen den nicht-unabhängigen Lagekoordinaten beschreiben. Diese Beziehungen müssen durch sorgfältige Analyse des Bewegungsverhaltens eines solchen Mehrkörpersystems gefunden werden. Bei einer rollenden Walze (Radius r) z.B. kann die Lage entweder durch die Koordinate $x = \int v_S\,dt$ oder aber durch die Koordinate $\varphi = \int \omega\,dt$ beschrieben werden, beide Koordinaten sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Die kinematische Beziehung $\varphi = x/r$ beschreibt die Abhängigkeit zwischen dem Lagewinkel der Walze φ und der Schwerpunktskoordinate x. Bei einer rutschenden Walze dagegen hätte die Bewegung zwei Freiheitsgrade (zwei unabhängige Lagekoordinaten).



Ist die Walze z.B. zusätzlich noch durch ein Seil mit einer anderen Masse verbunden, so wird zur Lösung der Aufgabe das „Schnittprinzip" verwendet. Jeder einzelne „starre Körper" wird „freigeschnitten", danach werden an den Schnittstellen Schnittreaktionen angetragen und dann werden die Bewegungsgleichungen mittels Impulssatz und Drallsatz aufgestellt.

2.2 Impuls- und Drallsatz für ausgedehnte Massen

Der Impuls eines starren Körpers (und jeder anderen irgendwie gearteten Masse *m*) lässt sich wegen $\vec v_S = (1/m)\int \vec v_P\, dm$ (Schwerpunktsatz abgeleitet nach der Zeit) einfach als $\vec p = m\,\vec v_S$ schreiben (dabei ist $\vec v_S$ die Absolutgeschwindigkeit des Schwerpunktes).
Der Impulssatz wird dann zu



$$d\vec p/dt = m \cdot \vec a = \vec F$$

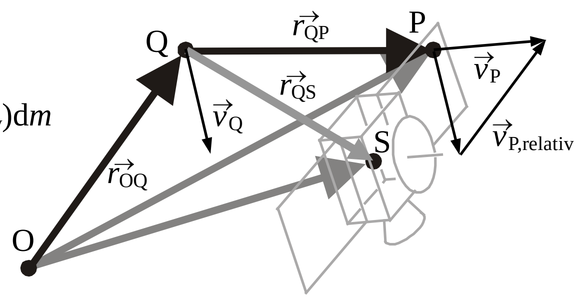
(*m* ist die zeitlich konstante Masse, $\vec a$ die absolute Schwerpunktsbeschleunigung und $\vec F$ die Resultierende aus allen einwirkenden Kräften, die nicht im Schwerpunkt angreifen muss).

Der Drall $\vec L_O$ einer Masse *m* bezüglich eines Fixpunktes O ist das Integral des Momentes der Impulse aller Massenelemente *dm*, also $\vec L_O = \int (\vec r_{OP} \times \vec v_P)\, dm$. Mit dem Moment $\vec M_O$ aller Kräfte im Punkt O lautet der Drallsatz dann $d\vec L_O/dt = \vec M_O$. Wenn man Drall und Moment vom Punkt O auf einen anderen (eventuell bewegten) Bezugspunkt Q umrechnet, so ergibt sich:

$$\vec L_O = \int \left((\vec r_{OQ} + \vec r_{QP}) \times (\vec v_Q + \vec v_{P,relativ})\right) dm$$

$$= \int(\vec r_{OQ}\times\vec v_P)dm + \int(\vec r_{QP}\times\vec v_Q)dm + \int(\vec r_{QP}\times\vec v_{P,relativ})dm$$

$$\vec L_O = (\vec r_{OQ} \times \vec v_S)\, m + (\vec r_{QS} \times \vec v_Q)\, m + \vec L_Q$$



Der Ausdruck für den Drall vereinfacht sich wenn der Bezugspunkt Q identisch mit dem Schwerpunkt S ist (d.h. $\vec r_{QS} = 0$) oder wenn der Bezugspunkt ein Fixpunkt ist (d.h. $\vec v_Q = 0$); oder wenn sich Q parallel zu S bewegt (d.h. wenn $\vec v_Q = \vec v_S$ und $\vec r_{OS} = \vec r_{OQ} + \vec r_{QS}$ ist).
$\vec L_Q$ ist der Relativdrall in Bezug auf Q. Für den Drallsatz muss auch das Moment umgerechnet werden: eine im Punkt O wirkende Kraft hat im Punkt Q das Moment $-\vec r_{OQ} \times \vec F$

$$\vec M_O = \vec M_Q + \vec r_{OQ} \times \vec F$$

Damit lautet der Drallsatz $d\vec L_O/dt = \vec M_O$ bezogen auf den (eventuell bewegten) Punkt Q :

$$(\dot{\vec r}_{OQ} \times \vec v_S)\, m + (\vec r_{OQ} \times \dot{\vec v}_S)\, m + (\dot{\vec r}_{QS} \times \vec v_Q)\, m + (\vec r_{QS} \times \dot{\vec v}_Q)\, m + \dot{\vec L}_Q = \vec M_Q + \vec r_{OQ} \times \vec F$$

$$(\vec v_Q \times \vec v_S)\, m + (\vec r_{OQ} \times \vec F) + (\vec v_{S,relativ} \times \vec v_Q)\, m + (\vec r_{QS} \times \vec a_Q)\, m + \dot{\vec L}_Q = \vec M_Q + \vec r_{OQ} \times \vec F$$

$$d\vec L_Q/dt + (\vec r_{QS} \times \vec a_Q)\, m = \vec M_Q \qquad (\text{ nur für } Q = S \text{ oder } \vec a_Q = 0 \;:\; d\vec L_Q/dt = \vec M_Q\;)$$

Immer aufgepasst: Der Drallsatz gilt in seiner einfachen Form $d\vec L/dt = \vec M$ nur für den Schwerpunkt ($\vec r_{QS} = 0$) und/oder für einen unbeschleunigten Bezugspunkt ($\vec a_Q = 0$) !

2.3 Das Massenträgheitsmoment

Für einen starren Körper lässt sich der Relativdrall $\vec{L}_Q = \int (\vec{r}_{QP} \times \vec{v}_P)\, dm$ wegen $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{QP}$ als lineare Funktion der Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ausdrücken, und zwar $\vec{L}_Q = J_Q \cdot \vec{\omega}$.
Dabei ist J_Q der sog. Trägheitstensor (eine Matrix). Hat der Drallvektor nur eine Komponente („ebene Bewegung"), so wird aus der Vektorgleichung die skalare Gleichung $L_Q = J_Q \cdot \omega$, mit dem skalaren Trägheitsmoment $J_Q = \int r^2 dm$

z.B.: für den Mittelpunkt einer homogenen Scheibe: $J_S = {}^1/_2\ m\, r^2$
oder für den Mittelpunkt einer homogenen Kugel: $J_S = {}^2/_5\ m\, r^2$
oder für den Mittelpunkt eines dünnen Stabes: $J_S = {}^1/_{12}\ m\, l^2$
oder für den (fixen) Endpunkt eines dünnen Stabes: $J_O = {}^1/_3\ m\, l^2$

Rotiert der Körper der Masse m nicht auf einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Achse sondern auf einer um den Betrag b dazu versetzten parallelen Achse, so ist sein Trägheitsmoment J_Q für Drehungen auf dieser versetzten Achse immer größer als das Schwerpunkts-Trägheitsmoment J_S . Es gilt der sog. Huygens-Steiner Satz:

$$J_Q = J_S + m\, b^2$$

Allgemein ist die kinetische Energie einer ausgedehnten Masse $E_{kin} = \int \frac{1}{2}\, \vec{v}_P^{\,2}\, dm$; für einen um den Fixpunkt O rotierenden starren Körper lässt sich das mit $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP}$ auf die Schreibweise $E_{kin} = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot (J_O \cdot \vec{\omega})$ umrechnen (mit J_O als Trägheitstensor bezogen auf den Punkt O). Bewegt sich der Körper außerdem noch translatorisch, so kann man schreiben $E_{kin} = \frac{1}{2}\, m\, \vec{v}_S^{\,2} + \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot (J_S \cdot \vec{\omega})$, die kinetische Energie lässt sich also für den Schwerpunkt in einen „translatorischen" und einen „rotatorischen" Anteil aufspalten.

Bei „ebenen Bewegungen" wird aus diesen Gleichungen $E_{kin} = \frac{1}{2}\, J_O \cdot \omega^2$ (wenn der Körper um den Fixpunkt O rotiert) bzw. $E_{kin} = \frac{1}{2}\, m\, v_S^2 + \frac{1}{2}\, J_S \cdot \omega^2$ (wenn der Körper translatorisch und rotatorisch bewegt wird).

3. Rotordynamik

3.1 Drehträgheit von starren Körpern

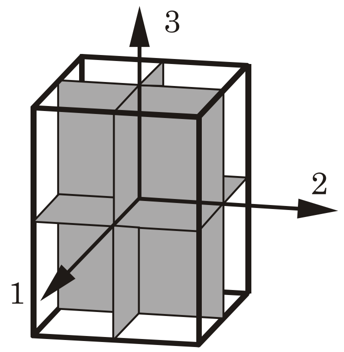
Schreibt man den Relativdrall eines starren Körpers mit der Geschwindigkeit eines Körperelements $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{QP}$ als Vektorgleichung $\vec{L}_Q = \int (\vec{r}_{QP} \times \vec{v}_P)\, dm$ unter Verwendung von $\vec{r}_{QP} = (x, y, z)$ und $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in Komponentenschreibweise (zunächst jedoch noch ohne Bezug auf ein spezielles Koordinatensystem), so ergibt sich der Drallvektor als eine lineare Vektorfunktion der Drehgeschwindigkeit:

$$\vec{L}_Q = J_Q \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega}$$

mit $A = \int (y^2+z^2)\, dm$, $B = \int (x^2+z^2)\, dm$, $C = \int (x^2+y^2)\, dm$
und $D = -\int yz\, dm$, $E = -\int xz\, dm$, $F = -\int xy\, dm$

Die Elemente in der Hauptdiagonalen A, B, C des symmetrischen Trägheitstensors J_Q heißen Massenträgheitsmomente, die anderen Elemente D, E, F heißen Massendeviationsmomente. Die Werte dieser Elemente hängen von der aktuellen Lage des Körpers in Relation zum verwendeten Koordinatensystem ab und sind i.A. Funktionen der Zeit, es sei denn, man verwendet z.B. ein mitbewegtes (körperfestes) Koordinatensystem (bei dem sich die Lage des Körpers in Relation zum Koordinatensystem nicht ändert).

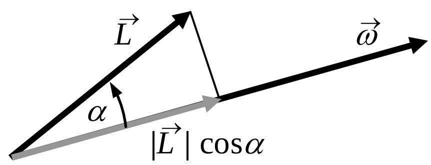
Am geeignetsten ist dabei die Verwendung eines sog. körperfesten Hauptachsensystems, bei dem die Deviationsmomente verschwinden und die Massenträgheitsmomente Extremwerte annehmen. Legt man z.B. bei einem homogenen Quader für das körperfeste Bezugssystems den Ursprung in den Schwerpunkt und die Achsen in die Symmetrieebenen, so müssen für dieses Bezugssystem die Deviationsmomente *D, E, F* verschwinden, weil sich zu jedem Massenelement *dm* mit den Koordinaten *yz* (bzw *xz* oder *xy*) auf der anderen Koordinatenachsenseite ein zugehöriges Element *dm* mit den Werten *–yz* (bzw *–xz* oder *–xy*) finden lässt. Der Drall für dieses Koordinatensystem ist also:



$$\vec{L} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega}$$

Für jeden beliebigen starren Körper lassen sich solche Hauptachsensysteme finden. Rotiert z.B. der oben skizzierte Körper auf seiner ersten Hauptachse, so gilt $\vec{L} = A \cdot \vec{\omega}$. Der Drallvektor und der Drehgeschwindigkeitsvektor sind dann also parallel, und man kann das Verhältnis der Länge von $\vec{L}$ zu $\vec{\omega}$ als ein Maß für die "Drehträgheit" auf dieser Achse sehen (A ist sozusagen ein Maß für den Widerstand, den der Körper einem Drehmoment entgegensetzt, das ihn in Rotation versetzen will). Da A die Dimension kg $\cdot$ m² hat ist es gebräuchlich, für $A = m\, r^2$ zu schreiben: m ist dann die Masse des Körpers und r der "Trägheitsradius" (der Radius eines hypothetischen Rings mit derselben Masse und derselben Drehträgheit auf dieser Achse).

Wenn der Körper nicht auf einer seiner Hauptachsen rotiert, wenn also der allgemeine Fall vorliegt, dann ist der Drallvektor $\vec{L}$ nicht parallel zum Drehvektor $\vec{\omega}$ (dadurch unterscheidet er sich ganz wesentlich vom Impulsvektor $\vec{p}$, der ja immer parallel zum Vektor der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_S$ ist). Der Körper rotiert dann auf einer durch die Richtung von $\vec{\omega}$ festgelegten Raumrichtung. Bezeichnet man die Drehträgheit auf dieser durch die Richtung vom Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ festgelegten Raumrichtung als $m\, r^2$, so wird die Länge r eine von der Raumrichtung abhängige Größe.
Die Trägheit des Körpers für diese Richtung ist dann das Verhältnis der Länge des Drallvektors auf dieser Achse, also $|\vec{L}| \cdot \cos\alpha$ (α ist dabei der Winkel zwischen $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$) zur Länge des Drehvektors $|\vec{\omega}|$, also:



$$m\, r^2 = |\vec{L}| \cos\alpha \,/\, |\vec{\omega}| = \vec{L} \cdot \vec{\omega} \,/\, |\vec{\omega}|^2$$

($\cos\alpha$ lässt sich dabei leicht mittels des Skalarproduktes berechnen: $\cos\alpha = \vec{L} \cdot \vec{\omega} \,/\, (|\vec{L}| \cdot |\vec{\omega}|)$)

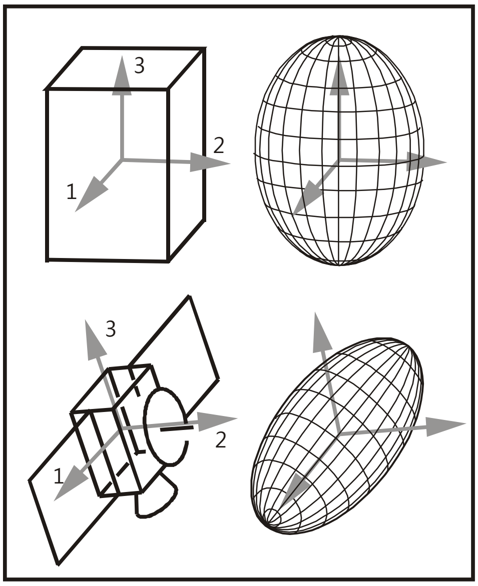
Diese Gleichung ergibt ausgewertet für ein körperfestes Hauptachsensystem:

$$m\, r^2 = (A \cdot \omega_1^2 + B \cdot \omega_2^2 + C \cdot \omega_3^2) \,/\, |\vec{\omega}|^2$$

und für den allgemeinen Fall erhält man:

$$m\, r^2 = (A \cdot \omega_1^2 + B \cdot \omega_2^2 + C \cdot \omega_3^2 + 2D\, \omega_2 \omega_3 + 2E\, \omega_1 \omega_3 + 2F\, \omega_1 \omega_2) \,/\, |\vec{\omega}|^2$$

Die Größe r hängt in beiden Fällen nur von der Richtung des Drehgeschwindigkeitsvektors $\vec{\omega}$ ab, nicht jedoch von seiner Länge. Bei einer Variation dieser Raumrichtung beschreibt r in beiden Fällen die geometrische Figur eines Ellipsoids; wobei die Achsen dieses Ellipsoids bei einem Hauptachsensystem mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Der Ort des Kehrwertes $1/r$ hat "ungefähr die Form des Körpers", soll heißen das Trägheitsellipsoid eines Stabes z.B. sieht aus wie eine langgestreckte elliptischer "Zigarre", und das Trägheitsellipsoid einer dünnen Scheibe (oder eines dreiflügeligen Propellers) sieht etwa so aus wie ein "Smarty". In jedem Fall können die Drehträgheitseigenschaften eines jeden starren Körpers durch die drei Massenträgheitsmomente A, B, C seines körperfesten Hauptachsensystems vollständig beschrieben werden (durch die sog. „Hauptträgheitsmomente“):



$$\vec{L}_Q = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega} \qquad \text{für den Schwerpunkt:} \quad \vec{L}_S = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega}$$

Diese (immer positiven) Massenträgheitsmomente können allerdings keine beliebigen Werte annehmen, es gelten z.B. die „Dreiecksungleichungen“ (zwei Trägheitsmomente zusammengenommen sind immer größer als das dritte). Für einen stabförmigen, auf der 1-Achse liegenden Körper z.B. gilt $A_S \approx 0$ und $B_S \approx C_S$ ($= {}^1/_{12}\, m\, l^2$); und für eine kreisförmige, dünne Scheibe mit dem Radius r und der 1-Achse als Symmetrieachse gilt $A_S = \frac{1}{2} m r^2$ und $B_S = C_S$ ($\approx \frac{1}{4} m r^2$). Die Lage des körperfesten Hauptachsensystems ist bei homogenen Körpern oftmals leicht festzustellen (die Achsen liegen in den Symmetrieebenen). Sind z.B. durch Messung Deviationsmomente bekannt (der allgemeine Fall), so lassen sich die Lage der Hauptachsen und die zugehörigen Werte der Hauptträgheitsmomente durch das Lösen einer sog. „Eigenwertaufgabe“ bestimmen.

Wie erwähnt sind Drallvektor $\vec{L}_S$ und Drehvektor $\vec{\omega}$ im Allgemeinen nicht kolinear (parallel). $\vec{L}_S$ und $\vec{\omega}$ sind jedoch sicher dann kolinear, wenn der starre Körper auf einer seiner körperfesten Hauptachsen rotiert. Rotiert der Körper auf einer seiner Hauptachsen (festgelegt durch die Richtung von $\vec{\omega}$), so gilt $\vec{L}_S = J_S \cdot \vec{\omega} = \lambda \cdot \vec{\omega}$, oder umformuliert:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega} = 0$$

Die Proportionalitätskonstante λ entspricht dann dem zugehörigen Hauptträgheitsmoment für Drehungen auf dieser Achse. Da es jedoch dann dabei nur auf die Richtung und nicht auf die Länge von $\vec{\omega}$ ankommt, muss das Gleichungssystem für diese Richtung singulär werden (d.h. die drei skalaren Komponenten der Vektorgleichung können nicht geeignet sein, ω_1 , ω_2 , ω_3 zu berechnen). Die Determinante der obigen Matrix muss also verschwinden.

Auswertung der Determinante liefert für realistische Massenmomente drei reelle Lösungen λ, (die drei Hauptträgheitsmomente). Die zugehörigen Hautträgheitsrichtungen findet man dann durch Berechnung der Richtung von $\vec{\omega}$ nach Einsetzen der jeweiligen Lösung λ in das Gleichungssystem.

Die Massenträgheitsmomente für den Schwerpunkt S als Bezugspunkt sind stets kleiner als die Massenträgheitsmomente für einen anderen Bezugspunkt Q. Es gilt der Huygens-Steiner Satz:

$$J_Q = \begin{bmatrix} A_S + m(y^2+z^2) & F_S - mxy & E_S - mxz \\ F_S - mxy & B_S + m(x^2+z^2) & D_S - myz \\ E_S - mxz & D_S - myz & C_S + m(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

Dabei kennzeichnen x, y und z die Versetzung des Bezugspunktes Q in Relation zu S. Für eine Verdrehung des Bezugssystems gib es ähnliche (jedoch erheblich kompliziertere) Formeln.

3.2 Die kinetischen Eulergleichungen

Sehr oft verwendet man für die Berechnung der Drehbewegung ein mitbewegtes, schwerpunktsbezogenes (oder fixpunktbezogenes) körperfestes Hauptachsensystem.
Der Drallsatz $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ wird mit $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ dann zu:

$$J \cdot d\vec{\omega}/dt + \vec{\omega} \times (J \cdot \vec{\omega}) = \vec{M} \qquad \text{(Vektorform der kinetischen Eulergleichungen)}$$

Die Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des starren Körpers ist dieselbe wie die Drehgeschwindigkeit des Koordinatensystems; J ist der Trägheitstensor und $\vec{M}$ das auf den Körper wirkende Moment im Schwerpunkt (oder im Fixpunkt). In Komponentenform lautet diese Vektorgleichung:

$$A \cdot \dot{\omega}_1 + (C - B)\,\omega_2\,\omega_3 = M_1$$
$$B \cdot \dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_1\,\omega_3 = M_2$$
$$C \cdot \dot{\omega}_3 + (B - A)\,\omega_1\,\omega_2 = M_3$$

Mit den kinetischen Eulergleichungen kann man nun entweder das Bewegungsverhalten eines starren Körpers als Funktion eines (vorgegebenen) äußeren Momentes berechnen; oder aber die Momentwirkung eines starren Körpers für ein vorgegebenes Bewegungsverhalten (dabei ist die Berechnung der Kraftwirkung von Rotoren die häufiger gestellte Übungsaufgabe).

3.3 Bewegung momentenfrei rotierender Körper:

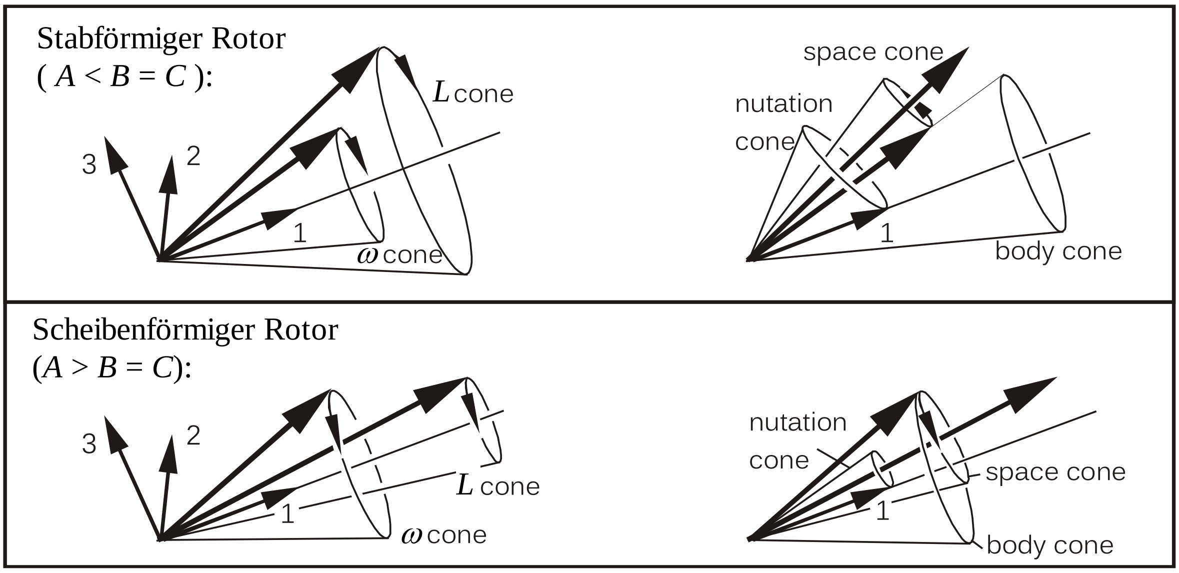
Für einen momentenfrei ($\vec{M} = 0$) rotierenden starren Körper mit symmetrischen Trägheitseigenschaften ($B = C$) lassen sich die kinetischen Eulergleichungen analytisch integrieren:

$$A \cdot \dot{\omega}_1 = 0$$
$$B \cdot \dot{\omega}_2 + (A - B)\,\omega_1\,\omega_3 = 0$$
$$B \cdot \dot{\omega}_3 + (B - A)\,\omega_1\,\omega_2 = 0$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_0\ \sin(\omega_1 (1 - A/B) \cdot (t - t_0)) \\ \omega_0\ \cos(\omega_1 (1 - A/B) \cdot (t - t_0)) \end{bmatrix}$$

Im körperfesten Hauptachsensystem ist also die 1-Komponente des Drehvektors ω_1 konstant; die 2- und die 3- Komponente beschreiben eine kreisförmige Bewegung mit dem Radius ω_0 .

Betrachtet vom körperfesten System durchläuft der $\vec{\omega}$ -Vektor also die Mantelfläche eines Kreiskegels, und zwar im Uhrzeigersinn für den stabförmigen Rotor ($A < B$) und gegen den Uhrzeigersinn für den scheibenförmigen Rotor ($A > B$). Betrachtet vom raumfesten System kann diese Bewegung als das Abrollen eines körperfesten „Spurkegels“ (body cone) auf einem raumfesten „Polkegel“ (space cone) gedeutet werden. Diese Bewegung ist für Kreisel typisch, sie hängt von den Anfangsbedingungen ab und wird als "Nutation" bezeichnet.



Die Stabilität der Bewegung eines momentenfreien starren Körpers mit unsymmetrischen Trägheitseigenschaften ($A \neq B \neq C$) lässt sich mit Hilfe der kinetischen Eulergleichungen untersuchen. Rotiert der Körper auf der körperfesten 1-Achse, so ist ω_1 konstant ($\omega_2 \cdot \omega_3 \approx 0$). Für kleine Störungen der Bewegung folgt durch Ableiten und Einsetzen:

$$B \cdot \dot{\omega}_2 + (A - C)\, \omega_1 \omega_3 = 0 \qquad BC \cdot \ddot{\omega}_2 + (A - C) \cdot (A - B)\, \omega_1^2 \omega_2 = 0$$

$$C \cdot \dot{\omega}_3 + (B - A)\, \omega_1 \omega_2 = 0 \qquad CB \cdot \ddot{\omega}_3 + (B - A) \cdot (C - A)\, \omega_1^2 \omega_3 = 0$$

Die Lösungen für diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind entweder Sinus-Cosinus Funktionen (die stabile Lösung falls $(A - C) \cdot (A - B)$ positiv ist) oder anwachsende und abklingende e-Funktionen (die instabile Lösung falls $(A - C) \cdot (A - B)$ negativ ist).
Die Nutationsbewegung ist also nur stabil, wenn A entweder das größte oder aber das kleinste Hauptträgheitsmoment ist. Die Bewegung ist instabil, wenn A das mittlere Hauptträgheitsmoment ist. (Dies gilt nur für starre Körper: Verliert der Körper bei der Rotation mechanische Energie und wird der energie-dissipierende „quasi-starre“ Körper, so sind auch die Drehungen um die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes instabil.)

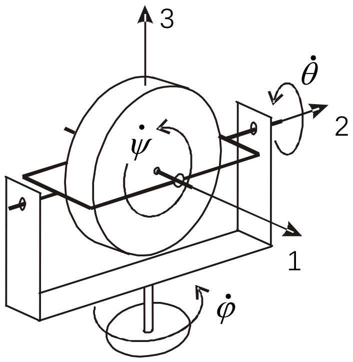
3.4 Kreiselmechanik

Laufräder in Kreiselgeräten sind meist abgeplattete kreisrunde Scheiben. Sie sollten „ausgewuchtet“ sein, d.h. keine sog. “statische Unwucht“ (Schwerpunkt nicht exakt auf der Drehachse) und keine „dynamische Unwucht“ (Drehachse nicht exakt identisch mit körperfester Hauptachse) aufweisen.

Eine abgeplattete Scheibe als Laufrad eines Kreiselgerätes ist besser geeignet als ein stabförmiger Rotor, da die Scheibe die Eigenschaft hat, bei Fertigungsungenauigkeiten der Lagerung oder bei Elastizität der Welle Ihre Drallachse auf die Drehachse einzustellen (längliche Rotoren neigen bei Fertigungsungenauigkeiten zu Vibrationen).

Bezeichnet man für einen ausgewuchteten Kreisel die Drehträgheit um die Symmetrieachse (1-Achse) mit A, so ist die Drehträgheit um die beiden zur Symmetrieachse senkrecht stehenden Achsen (die 2-Achse und die 3-Achse) gleichermaßen B. Es bietet sich dann für die Berechnung der Bewegungsgleichungen die Verwendung eines mitbewegten Koordinatensystems an.

Dieses mitbewegte Koordinatensystem macht jedoch nur die Drehung des Kreisels um die Vertikale (Winkel φ) und um die Horizontale (Winkel θ) mit, nicht jedoch die Drehung um die Symmetrieachse (Winkel ψ). Auch in diesem „Kardanfesten Koordinatensystem" sind die Elemente des Trägheitstensors konstant. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass sich jetzt die Winkelgeschwindigkeiten von Kreisel und Koordinatensystem unterscheiden:



$$\vec{\omega}_{\text{Kreisel}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi} \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{\text{System}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Für die Berechnung des Drallvektors wird die Drehgeschwindigkeit des Kreisels benötigt:

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}_{\text{Kreisel}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi} \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Für die Berechnung der Ableitung des Dralls $J \cdot d\vec{\omega}_{\text{Kreisel}}/dt + \vec{\omega}_{\text{System}} \times (J \cdot \vec{\omega}_{\text{Kreisel}}) = \vec{M}$ im Drallsatz wird auch die Drehgeschwindigkeit des Koordinatensystems benötigt:

$$\frac{\mathrm{d}}{dt} \begin{bmatrix} A\,(\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi}) \\ -B\dot{\theta} \\ B\dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A\,(\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi}) \\ -B\dot{\theta} \\ B\dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Diese Vektorgleichung entspricht drei skalaren Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der Lagewinkel φ, θ und ψ als Funktion der Zeit. Sie ist geeignet, die sog. „Präzessionsbewegung" in Abhängigkeit von dem einwirkenden Lagermoment (M_1, M_2, M_3) für Mess- und Stellkreisel zu berechnen.

4. Schwingungen

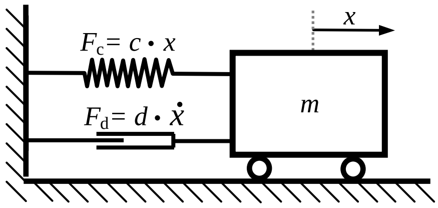
4.1 Mathematische Behandlung von linearen Schwingungen

Treten bei der Auslenkung einer Masse aus einer Ruhelage rückstellende Kräfte auf (z.B. bei einem Pendel oder einer federnden Lagerung), so kann diese Masse Schwingungen ausführen. Dabei wird abwechselnd potentielle in kinetische Energie und dann wieder kinetische Energie in potentielle (Lage- oder Feder-) Energie umgewandelt. Wenn dabei Dämpfung beteiligt ist, so wird außerdem noch mechanische Energie in Wärmeenergie umgesetzt ("dissipiert").
Die Bewegungsgleichung für einen linearen gedämpften Feder/Masse Schwinger lautet:

$$m\,\ddot{x} = -c \cdot x - d \cdot \dot{x}$$

oder mit $\nu_o^2 = c/m$, $2\delta = d/m$

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \nu_o^2 \cdot x = 0$$

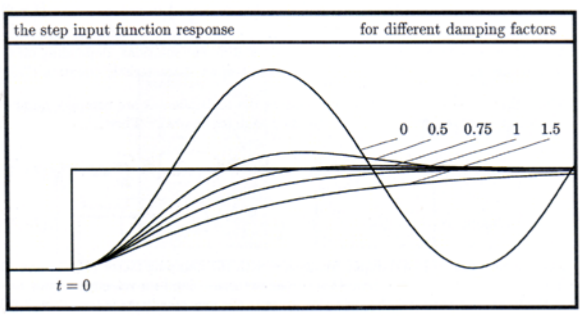


Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ bringt die sog. "charakteristische Gleichung" : $\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \nu_o^2 = 0$ dieser "homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung". Die zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\lambda = -\delta \pm \sqrt{-\nu_o^2 + \delta^2}$ können in Abhängigkeit von δ konjugiert imaginär, konjugiert komplex, identisch reell oder unterschiedlich reell sein:

$\delta = 0$: $\lambda = \pm\ i\ \nu_o$ $\longrightarrow$ $x = A \sin \nu_o t + B \cos \nu_o t$ bzw.: $C \sin(\nu_o t + \psi_o)$
$\delta < \nu_o$: $\lambda = -\delta \pm\ i\ \nu$ $\longrightarrow$ $x = e^{-\delta t} (A \sin \nu t + B \cos \nu t)$ bzw.: $C\, e^{-\delta t} \sin(\nu t + \psi_o)$
$\delta = \nu_o$: $\lambda = -\delta$ $\longrightarrow$ $x = e^{-\delta t} (A + B\, t)$
$\delta > \nu_o$: $\lambda = -\delta \pm \nu$ $\longrightarrow$ $x = e^{-\delta t} (A \sinh \nu t + B \cosh \nu t)$ bzw.: $C\, e^{(-\delta+\nu)\, t} + D\, e^{(-\delta-\nu)\, t}$

Für kleine Dämpfungsbeiwerte δ unterscheidet sich die Frequenz ν der gedämpften Schwingung nur wenig von der Frequenz ν_o der ungedämpften Schwingung ($\nu^2 = |\nu_o^2 - \delta^2|$).
Die allgemeine Lösung $x(t)$ muss schließlich durch Wahl der Integrationskonstanten an den Spezialfall angepasst werden: Im periodischen Fall (kleine Dämpfung) lässt sich die Lösung entweder als Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktion mit gleicher Frequenz und unterschiedlicher Amplitude (A und B) darstellen, alternativ als Sinusfunktion mit der Amplitude C und der Phasenverschiebung ψ_o. Im nicht periodischen Fall (starke Dämpfung) kann die Lösung entweder unter Verwendung von sog "hyperbolischen Funktionen" oder unter Verwendung von e-Funktionen dargestellt werden. (Der Fall $\delta < 0$ bedeutet Energie-Zufuhr und kann als selbsterregte Schwingung interpretiert werden, mit $\nu \approx \nu_o$ für kleine δ.)

Eine "erzwungene Schwingung" liegt vor, wenn die Masse durch eine zusätzliche Kraft beschleunigt wird. In der Regelungstechnik sind besonders die Impulsantwort und die Sprungantwort eines Schwingungssystems von Bedeutung, da nach dem "Superpositions-prinzip" jede Anregung als eine aus vielen Sprüngen (bzw. Stößen) zusammengesetzte Funktion dargestellt werden kann.
Die Lösung für die Impulsanregung ist dann die Eigenschwingung der homogenen Gleichung für die Anfangsbedingungen $x = 0$, $\dot{x} \neq 0$; die Lösung für die Sprunganregung berechnet sich als Eigenschwingung um eine neue Auslenkung für die Anfangsbedingungen $x \neq 0$, $\dot{x} = 0$.



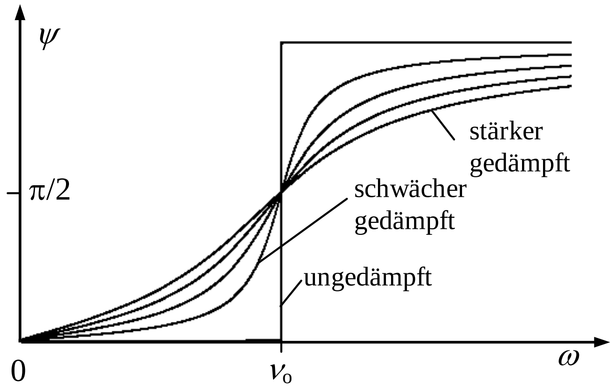
Ebenfalls von Bedeutung ist die Anregung von Schwingungssystemen mit harmonischen Funktionen (Sinus- und Cosinus-Funktionen), da sich nach Fourier jede periodische Funktion als eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen interpretieren lässt. Regt man den gedämpften Feder/Masse Schwinger durch eine zusätzliche Beschleunigung k mit der Kreisfrequenz ω an

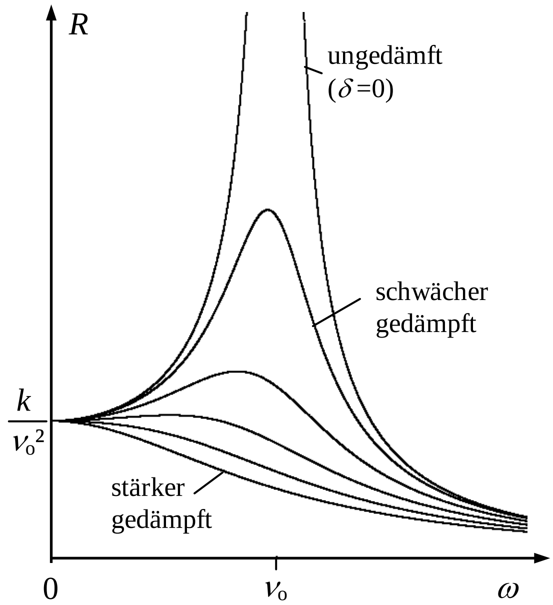
$$\ddot{x} + 2\delta\cdot\dot{x} + \nu_o^2\cdot x = k\cos\omega t$$

so besteht die allgemeine Lösung dieser "inhomogenen linearen Differentialgleichung (DGL)" aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL überlagert mit einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL ("Ansatz"), also $x(t)$ = [allgemeine homogene Lösung] + $R\cos(\omega t - \psi)$

mit $$R = \frac{k}{\sqrt{(\nu_o^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

und $$\tan\psi = \frac{2\delta\omega}{(\nu_o^2-\omega^2)}$$



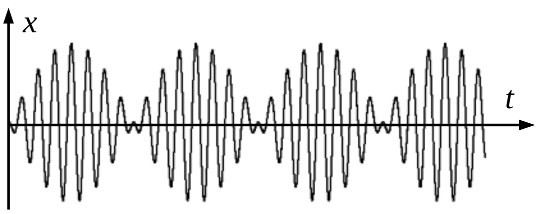


Nach Abklingen der Eigenschwingung durch Dämpfung (die allgemeine homogene Lösung) schwingt die Masse also phasenverschoben um den Winkel ψ mit der Anregungsfrequenz ω. Ihre Amplitude wird durch die Resonanzfunktion R beschrieben. Bei geringer Dämpfung angeregt mit der Eigenfrequenz ($\omega = \nu_o$) schwingt die Masse mit großer Amplitude um 90° phasenverschoben; bei unterkritischer Anregung ($\omega < \nu_o$) schwingt die Masse gleichphasig, bei überkritischer Anregung gegenphasig.

Passt man für den Fall verschwindender Dämpfung ($\delta = 0$) die allgemeine Lösung an die Randbedingungen $x_o = 0$, $\dot{x}_o = 0$ ($t = 0$) an, so erhält man eine sog. "Schwebung":

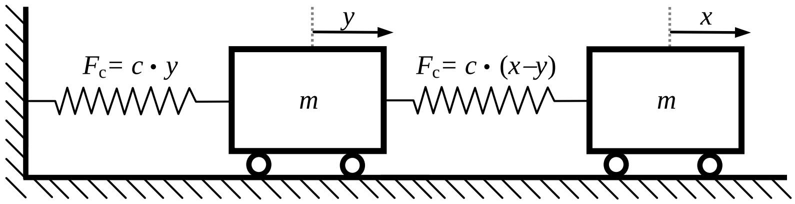
$$x(t) = A\sin\nu_o t + B\cos\nu_o t + \frac{k}{\nu_o^2-\omega^2}\cos\omega t$$

$$x(t) = \frac{k}{\nu_o^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos\nu_o t)$$
$$= \frac{2k}{\nu_o^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\nu_o-\omega}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\nu_o+\omega}{2}t\right)$$



Bei Anregung mit annähernd der Eigenfrequenz ($\omega \approx \nu_o$) schwingt die Masse mit an und abschwellender Amplitude. Nähert sich die Anregungsfrequenz der Eigenfrequenz an ($\omega \rightarrow \nu_o$), so ergibt sich die Lösung als $x(t) = (k\,t / 2\nu_o)\sin\nu_o t$, also als eine Schwingung mit zeitlich linear ansteigender Amplitude ("Resonanz").

Die mathematische Behandlung von Koppelschwingungen ist i.A. rechenaufwendig und wird hier an einem möglichst einfachen Beispiel gezeigt: zwei gleichschwere Massen seien durch eine Feder miteinander verbunden, gleichzeitig sei eine davon durch eine gleichartige Feder mit der Wand verbunden. Mit $\nu^2 = c/m$ (Frequenz des Feder/Masse Schwingers) ergibt sich:



$$m\ddot{x} = -c\cdot(x-y)$$
$$m\ddot{y} = -c\cdot y + c\cdot(x-y)$$

$$\ddot{x} + \nu^2 x - \nu^2 y = 0$$
$$\ddot{y} + 2\nu^2 y - \nu^2 x = 0$$

Der Ansatz $x = A\,e^{\lambda t}$, $y = B\,e^{\lambda t}$ liefert nach Elemination der Amplitudenkoeffizienten A und B die charakteristische Gleichung:

$$A\lambda^2 + A\nu^2 - B\nu^2 = 0 \quad\longrightarrow\quad \frac{B}{A} = \frac{\lambda^2+\nu^2}{\nu^2} \qquad \lambda^4 + 3\nu^2\lambda^2 + \nu^4 = 0$$

$$B\lambda^2 + 2B\nu^2 - A\nu^2 = 0 \quad\longrightarrow\quad \frac{B}{A} = \frac{\nu^2}{\lambda^2+2\nu^2} \qquad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}\nu^2 \pm \sqrt{\frac{9}{4}\nu^4 - \frac{4}{4}\nu^4}}$$

Hier hat die charakteristische Gleichung also zwei mal zwei konjugiert imaginäre Lösungen λ. Der Lösung $\lambda^2 = (-3/2 - \sqrt{5}/2)\,\nu^2$ oder $\lambda = 1.618\,i\nu$ entspricht das Amplitudenverhältnis $B/A = (-1/2 - \sqrt{5}/2) = -1.618$ und damit die "schnelle Schwingung gegeneinander" :

$$x(t) = A_1 \sin(1.618\,\nu t + \psi_1) \quad ; \qquad y(t) = -1.618\,A_1 \sin(1.618\,\nu t + \psi_1) \quad ;$$

der Lösung $\lambda^2 = (-3/2 + \sqrt{5}/2)\,\nu^2$ oder $\lambda = 0.618\,i\nu$ entspricht das Amplitudenverhältnis $B/A = (-1/2 + \sqrt{5}/2) = +0.618$ und damit die "langsame Schwingung miteinander" :

$$x(t) = A_2 \sin(0.618\,\nu t + \psi_2) \quad ; \qquad y(t) = +0.618\,A_2 \sin(0.618\,\nu t + \psi_2) \quad .$$

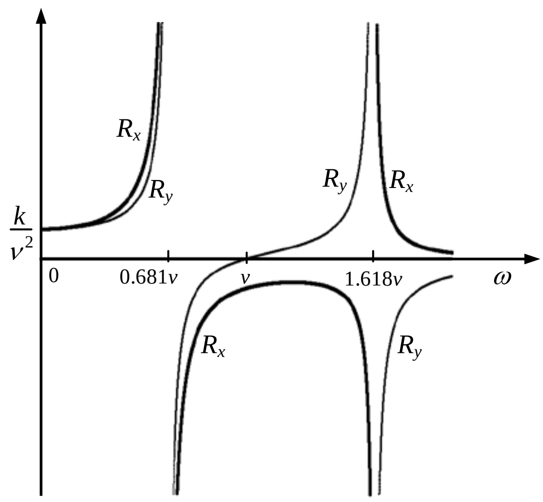
Die Koppelschwingung kann angeregt werden, z.B. durch eine periodisch schwingende Wand:

$$\ddot{x} + \nu^2 x - \nu^2 y = 0$$
$$\ddot{y} + 2\nu^2 y - \nu^2 x = k\cos\omega t$$

Der Ansatz $x = R_x \cos\omega t$; $y = R_y \cos\omega t$ liefert nach Transformation die beiden "Resonanzfunktionen" R_x und R_y :

$$R_x = \frac{k\,\nu^2}{\omega^4 - 3\nu^2\omega^2 + \nu^4}$$

$$R_y = \frac{k\,(\nu^2 - \omega^2)}{\omega^4 - 3\nu^2\omega^2 + \nu^4}$$



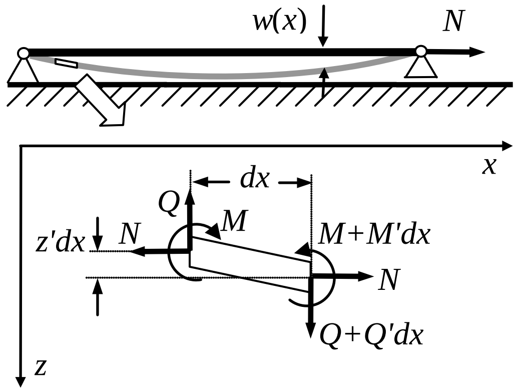
R_x und R_y lassen sich für (ω/ν) auftragen.
Aus dem Diagramm lässt sich folgern, dass die Resonanzfunktionen bei Anregung sowohl mit der schnellen als auch mit der langsamen Eigenfrequenz Polstellen besitzen (Nenner = 0).
Bei Anregung mit der Frequenz $\omega = \nu = \sqrt{c/m}$ wird R_y zu Null, in diesem Fall steht die linke Masse still, während die rechte Masse gegenphasig zur Schwingung der Wand schwingt.
Dieser Effekt technisch bei der sogenannten "Schwingungstilgung" genutzt.

4.2 Biegeschwingungen

Bei der mathematischen Behandlung von Biegeschwingungen treten sogenannte "partielle" Differentialgleichungen auf (die sich i.A. nur für Sonderfälle analytisch lösen lassen): Um z.B. die Schwingungen eines unter einer konstanten Zugspannung N stehenden, homogenen Balkens (Masse m, Länge l und Biegesteifigkeit EI) zu berechnen, wird für ein infinitesimal kleines Stückchen (Masse dm, Länge dx) das (Mittelpunkts-) Momentengleichgewicht und der Impulssatz in z-Richtung geschrieben:

$$M'dx + N\,z'\,dx = Q\,dx$$

$$dm\,\ddot{z} = Q'dx$$



Nach Kürzen von dx und Ableiten der ersten Gleichung nach x ergibt sich:

$$(dm\,/dx)\,\ddot{z} = M'' + N\,z''$$

und mit dem Biegemoment $M = -EI\,z''$:

$$(\,m/l\,)\,\ddot{z} = -EI\,z'''' + N\,z''$$

Das Verhältnis $dm\,/dx = m/l$ ist für einen homogenen Balken konstant. Die oben stehende partielle DGL hat für die z-Koordinate eine Ableitung zweiter Ordnung nach der Zeit t, sowie eine vierte und eine zweite Ableitung nach der Koordinate x. "Beroulli's Ansatz" separiert die zeitliche Abhängigkeit der Koordinate z von der örtlichen Abhängigkeit:

$$z\,(\,t,\,x\,) = C_o \sin\omega\,(t - t_o) \cdot w(x)$$

Leitet man diesen Ansatz zweimal nach der Zeit t und viermal nach der Koordinate x ab und setzt die entsprechenden Ableitungen in die partielle Differentialgleichung ein, so kann man das Zeitverhalten wegkürzen und erhält nach Umformung die DGL der Biegelinie $w(x)$:

$$EI\,w''''(x) - N\,w''(x) - (m/l\,)\,\omega^2\,w(x) = 0$$

Die charakteristische Gleichung ($EI\,\lambda^4 - N\,\lambda^2 - (m/l\,)\,\omega^2 = 0$) hat vier Lösungen (Wurzeln):

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{N}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{N}{2EI}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{l\,EI}}}$$

zwei reelle Lösungen $\lambda = \pm\mu$
zwei konjugiert imaginäre $\lambda = \pm\,i\nu$

Zum Beispiel, für den Fall eines schwingenden Balkens ohne Zugspannung ($N = 0$) haben die vier Lösungen den gleichen Betrag und die Biegelinie nimmt die allgemeine Lösung an:

$$w(x) = A\sin\nu x + B\cos\nu x + C\sinh\mu x + D\cosh\mu x \quad , \quad \text{mit} \quad \nu = \mu = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{l\,EI}}$$

Aus den Randbedingungen $w(0) = 0$, $w''(0) = 0$ folgt $B{+}D = 0$ und $-B{+}D = 0$, also $B = D = 0$. Aus $w(l\,) = 0$, $w''(l\,) = 0$ folgt $A\sin\nu l + C\sinh\mu l = 0$ sowie $-A\,\nu^2\sin\nu l + C\,\mu^2\sinh\mu l = 0$. Da μ gleich ν ist und da die Sinushyperbolikus-Funktion für Argumente $\mu\,l \neq 0$ niemals zu Null werden kann, folgt $C = 0$. Für $A \neq 0$ muss die Sinusfunktion also zu Null werden, ihr Argument $\nu\,l = \sqrt[4]{m\omega^2 / lEI} \cdot l$ muss also die Werte π, 2π, 3π, ... annehmen. Damit lassen sich die Frequenzen ω der Schwingungen berechnen. Der Klang der Schwingung entsteht aus einer Überlagerung von Sinusfunktionen mit 1,2,3... "Bäuchen" unterschiedlicher Frequenz.

Noch ein Beispiel: Bei einer gespannten Saite mit vernachlässigbarer Biegesteifigkeit ($EI = 0$) vereinfachen sich die DGL der Biegelinie und die zugehörige allgemeine Lösung zu:

$$w''(x) + \frac{m\omega^2}{l\,N}\, w(x) = 0 \qquad\qquad w(x) = A \sin\sqrt{\frac{m\omega^2}{l\,N}}\, x + B\cos\sqrt{\frac{m\omega^2}{l\,N}}\, x$$

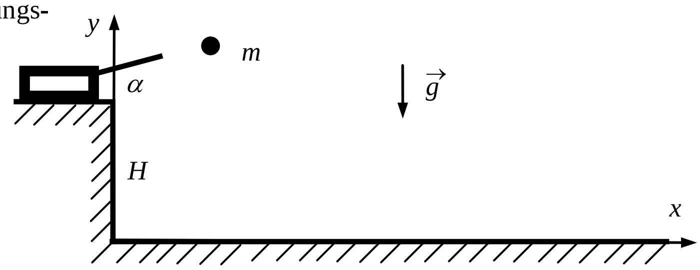
Die Randbedingungen liefern $w(0) = 0 \;\longrightarrow\; B = 0$ und $w(l\,) = 0 \;\longrightarrow\; A \sin\sqrt{\frac{m\omega^2}{l\,N}}\, l = 0.$

Für $A \neq 0$ muß also gelten : $\sqrt{\frac{m\omega^2}{l\,N}}\, l = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; oder $\omega = n\,\pi\sqrt{\frac{N}{ml}}$ (mit $n = 1,2,3...$)

Die Saite schwingt mit einer Grundfrequenz und den zugehörigen Obertönen, wobei Anregung und Dämpfung die zugehörigen Amplituden und damit den Klang der Saite bestimmen.

Übungsaufgaben zum Kapitel 1 (Bahnmechanik):

Aufgabe 1-1: Eine Kanone steht auf einer Anhöhe (Höhe H) und beschießt ein Schlachtfeld (obwohl man das ja eigentlich nicht machen sollte). Das Geschoß (Masse m) tritt mit der Geschwindigkeit v und dem Winkel α aus der Mündung des Rohres aus, die Erdanziehungsbeschleunigung sei g (konstant nach unten); die Luftreibung sei vernachlässigbar klein.

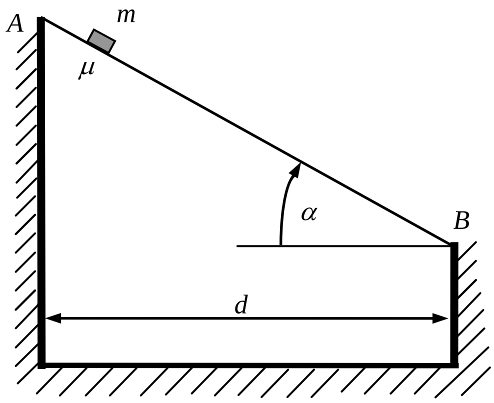


a.) Berechnen Sie die Bahnkurve $x(t)$, $y(t)$;

b.) die Schußweite x_{end} für den Winkel $\alpha = 45°$;

c.) und die Einschlagsgeschwindigkeit v_{end} .

Aufgabe 1-2: Eine Punktmasse m wird bei A stoßfrei losgelassen und rutscht unter dem Einfluss von Schwerkraft (Gravitationsbeschleunigung g) und Reibungskraft (Beiwert μ) eine schiefe Ebene (Winkel α) herunter; dabei durchläuft sie bis B eine fest vorgegebene horizontale Distanz d.



a.) Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}$ der Masse als Funktion des Neigungswinkels α.

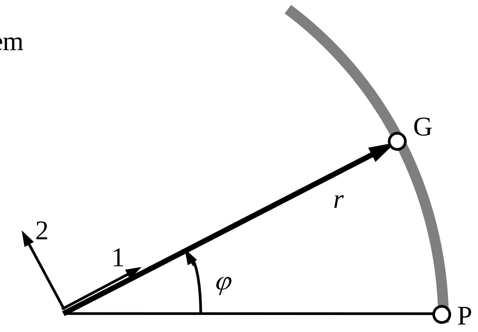
b.) die Zeit T für die Rutschfahrt von A nach B als Funktion des Neigungswinkels α.

c.) den Winkel α_{Min} , für den die Rutschzeit T minimal wird.

Aufgabe 1-3: Das Datenblatt eines elektrischen Einpersonentransportmittels ("Segway") gibt für horizontale Geradeausfahrt eine typische Reichweite von 10 km bei einem Energieverbrauch von 5 kWh pro 100 km an, wobei ein Regler die Höchstgeschwindigkeit auf 10 km/h (≈2.8 m/s) drosselt. Ermitteln Sie:

a.) den Energieinhalt der Akkus in kWh;
b.) die Vortriebsleistung des Elektromotors bei Geradeausfahrt in kW;
c.) die zugehörige Vortriebskraft (=Fahrtwiderstandskraft) in N;
und bei einem Fahrzeuggesamtgewicht inklusive Fahrer von 100 kg (Erdbeschleunigung $g \approx 10$ m/s²):
d) das Gesamtsteigvermögen (Gipfelhöhe) bei sehr langsamer Bergfahrt (ohne Fahrtwiderstand) in km sowie
e.) den Leistungsbedarf in kW bei scheller Bergfahrt (10% Steigung bei 10 km/h ≈ 0.28 m/s Steiggeschwindigkeit).

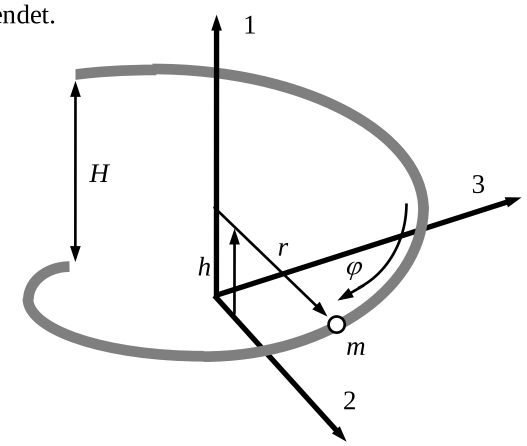
Aufgabe 1-4: Ein Polizeifahrzeug (Punktmasse P) startet aus dem Stand durch, um ein Gangsterfahrzeug (Punktmasse G), das mit konstanter Geschwindigkeit v fährt und sich gerade an der Position φ_0 =30° befindet, noch vor Ende der Kurve bei φ = 90°, Radius r konstant) abzufangen.
Berechnen Sie:



a.) die dazu notwendige Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$;

b.) die Relativgeschwindigkeit der Fahrzeuge bei φ = 90°;

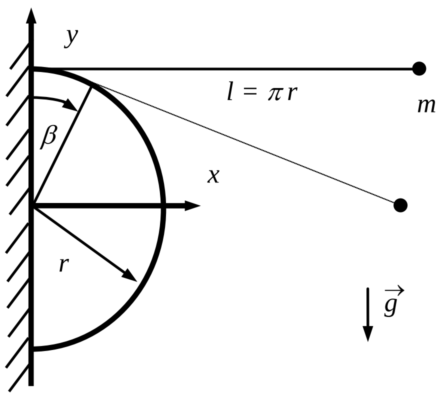
Aufgabe 1-5: Ein Kind (Punktmasse m) rutscht reibungsfrei das Geländer einer Wendeltreppe herunter (obwohl es das ja eigentlich nicht tun sollte). Zur Berechnung der Bewegung wird ein mitgeführtes karthesisches Koordinatensystem („Zylinderkoordinaten" r, φ und h) verwendet.
Berechnen Sie:



a.) die Absolutgeschwindigkeit v als Funktion der Höhenänderung Δh ($= H - h$);

b.) den Winkel φ als Funktion des Höhenänderung Δh und der Etagenhöhe H;

c.) die dazu zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten Sinkgeschwindigkeit $\dot{h} = dh/dt$ und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$;

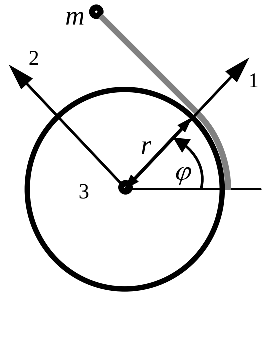


Aufgabe 1-6: Eine Punktmasse m ist mit einem horizontalen Seil an der Wand befestigt. Sie wird stoßfrei losgelassen und fällt nach unten, wobei sich das Seil um einen an der Wand befestigten Halb-Zylinder (Radius r , Umschlingungswinkel β) wickelt.

a.) Bestimmen Sie die Bahnkurve $x (\beta)$, $y (\beta)$.

b.) Mit welcher Absolutgeschwindigkeit v schlägt die Punktmasse auf die Wand auf ($x = 0$, $y = - r$) ?

Aufgabe 1-7: Eine an einem Seil (Länge l) befestigte Punktmasse m bewegt sich reibungsfrei (mit konstanter Absolutgeschwindigkeit v) in der horizontalen 1-2 Ebene, wobei sich das Seil um einen Zylinder (Radius r) wickelt. Die Lage der 1-Achse des mitgeführten Koordinatensystems wird dabei durch den aktuellen Umschlingungswinkel φ des Seils um den Zylinder beschrieben, die 3-Achse (= Zylinderachse) ist raumfest und zeigt nach oben.
Aufgabe ist es, die Seilkraft S als Funktion von φ zu berechnen.



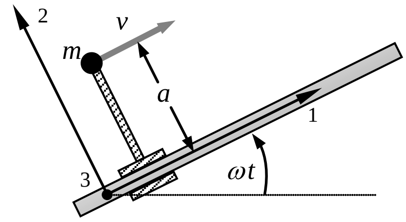
a.) Geben Sie den Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ für die Lage der Punktmasse m an.

b.) Berechnen Sie über den Geschwindigkeitsvektor die Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Koordinatensystems als Funktion der Lage φ und der Absolutgeschwindigkeit v.

c.) Berechnen Sie über den Beschleunigungsvektor (Impulssatz) die Seilkraft S (als Funktion der Lage φ und der Absolutgeschwindigkeit v).

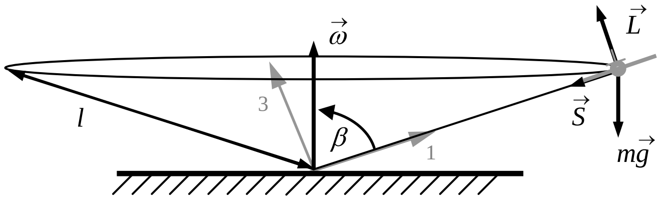
Aufgabe 1-8: Entlang einer um die 3-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Führungsschiene bewegt sich eine Punktmasse m mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v im senkrechten Abstand a parallel zur Schiene in der 1-2 Ebene in 1-Richtung (zum Zeitpunkt $t = 0$ befand sich die Masse auf der 2-Achse). Ermitteln Sie für das skizzierte mitbewegte Koordinatensystem:

a.) den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ des Koordinatensystems,
b.) den Ortsvektor $\vec{r}$ der Punktmasse m,
c.) den Vektor ihrer Absolutgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$,
d.) ihren Ortsbeschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}$,
e.) den Drallvektor $\vec{L}$ (bezogen auf den Koordinatenursprung).

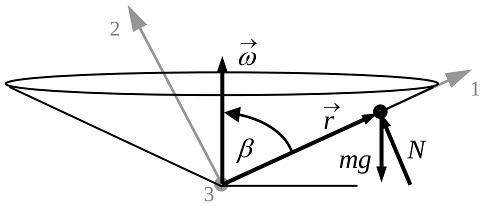


Aufgabe 1-9: Ein Fesselflugmodell (Punktmasse m) fliegt mit konstanter Geschwindigkeit v einen Kreis, wobei das Seil der Länge l die Mantelfläche eines nach unten geöffneten Kreiskegels durchläuft (Halbkegelwinkel β). Zur Berechnung der Bewegung wird ein mitbewegtes Koordinatensystem verwendet, dessen 1-Achse immer längs des Seils zum Modell zeigt und dessen 2-Achse immer horizontal bleibt (Ortsvektor $\vec{r} = (\, l,\, 0,\, 0\,)$, Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (\,0,\, v,\, 0\,)$). Auf das Modell wirken die Seilkraft $\vec{S}$, die Auftriebskraft $\vec{L}$ (senkrecht zum Seil) und die Gewichtskraft $m\vec{g}$ (Schub und Widerstand kompensieren sich). Berechnen Sie:

a.) den Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ (als Funktion von v,l, und β).
b.) den Ortsbeschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}$
c.) die auf das Flugmodell wirkenden Kräfte L und S.



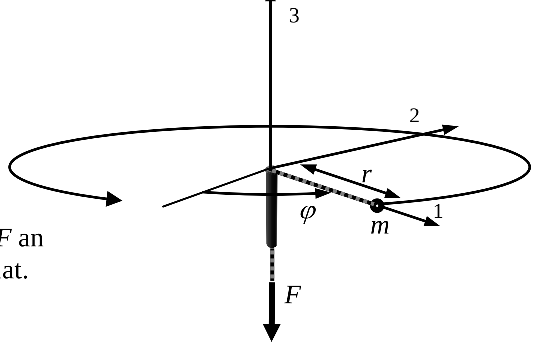
Aufgabe 1-10: Eine Punktmasse m rutscht auf der Oberfläche einer kreiskegelförmigen Schüssel (dabei zeigt die Kegelspitze senkrecht nach unten, der Halbkegelwinkel ist β). Die Bewegung sei reibungsfrei, auf die Punktmasse wirken also nur Gravitationskraft mg (senkrecht nach unten) und Normalkraft N (nach oben aber senkrecht zur Schüsseloberfläche). Der Ort der Punktmasse wird im mitbewegten Koordinatensystem (siehe Skizze) durch den Ortsvektor $\vec{r} = (\, r,\, 0,\, 0\,)$ mit r als momentanen Abstand von der Kegelspitze und durch den Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega} = (\dot{\varphi}\,\cos\beta,\ \dot{\varphi}\,\sin\beta,\ 0\,)$ mit φ als Lagewinkel des Koordinatensystems beschrieben.



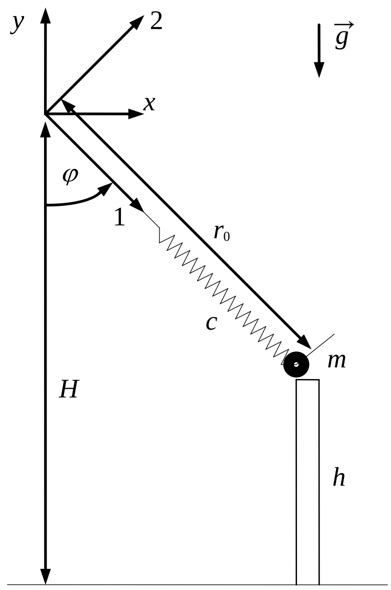
a.) Wieviele Freiheitsgrade hat diese Punktbewegung?
b.) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und den Ortsbeschleunigungsvektor der Punktmasse.
c.) Stellen Sie mit Hilfe des Impulssatzes die Bewegungsgleichungen der Punktbewegung auf.
d.) Finden Sie mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes ein Integral für diese Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 1-11: Bei einem Weltraumexperiment umläuft eine an einem Seil befestigte Punktmasse m auf einer kreisförmigen Bahn die Öffnung eines Rohres, durch welche das Seil geführt wird. Zur Berechnung der Bewegung wird ein mitbewegtes Koordinatensystem verwendet (siehe Skizze), φ sei der Bahnwinkel und r der Abstand der Masse von der Rohröffnung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Abstand r_0 und die Seilkraft $F_0 = m\, r_0\, \dot{\varphi}_0^2$, dann wird damit begonnen, das Seil mit einer <u>konstanten</u> Seilkraft $F > F_0$ durch das Rohr einzuziehen.

a.) Wieviele Freiheitsgrade hat nun die (ebene) Bewegung von m ?
b.) Stellen Sie mit Hilfe des Impulssatzes die Bewegungsgleichungen für die Bewegung von m auf.
c.) Berechnen Sie mit Hilfe des Drallerhaltungssatzes für den Koordinatenursprung die Umlaufgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(r)$.
d.) Berechnen Sie die mechanische Arbeit $W(r)$, welche die Kraft F an der Masse m verrichtet hat, wenn diese den Abstand r erreicht hat.
e.) Berechnen Sie die Absolutgeschwindigkeit der Masse $v(r)$.



Aufgabe 1-12: Ein Bungee-Springer (Punktmasse m, Erdbeschleunigung g) schwingt sich an einem elastischen Seil (Federsteifigkeit c, im ungespannten Zustand die Länge r_0 , masselos, im Koordinatenursprung befestigt) von einer Mauer (Höhe h) herab. Die (ebene!) Bewegung kann entweder mit Vektoren des raumfesten Koordinatensystems (x,y,z) unter Verwendung der Größen x,y sowie deren zeitlichen Ableitungen; oder aber mit Vektoren des bewegten Koordinatensystems (1,2,3) unter Verwendung der Größen r und φ, sowie deren Ableitungen beschrieben werden.



a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen im raumfesten Koordinatensystem an.

c) Geben Sie die Bewegungsgleichungen im mitbewegten Koordinatensystem an.

d) Welche Absolutgeschwindigkeit v hat der Springer, wenn er bei $\varphi = 0$ am Boden ankommt (falls er dort ankommt)?

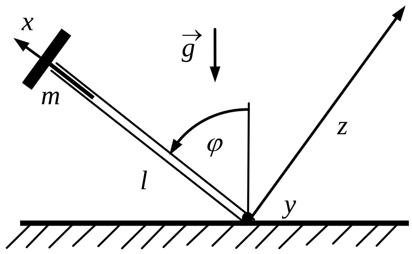
Aufgabe 1-13: Ein Nagel (Punktmasse m) wird mit seiner Spitze in einen oben abgeschnittenen Strohhalm (Länge l , Masse vernachlässigbar) gesteckt. Durch das Gewicht des Nagels (Erdbeschleunigung g) knickt der Halm um (Winkel φ), wobei die Federwirkung des abgeknickten Halms in der Knickstelle am Boden als vernachlässigbar klein angenommen werden soll (d.h. der Halm richtet sich von selbst nicht wieder auf). Zur Berechnung der Bewegung wird ein mitbewegtes Koordinatensystem x, y und z verwendet (Koordinatenursprung in der Knickstelle, die x-Achse in der Halmachse und die y-Achse immer parallel zum Boden aus der Papierebene heraus nach vorne).
Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ zeigt also immer in die positive y-Richtung und hat den Betrag $\dot{\varphi}$.

a.) Berechnen Sie mit Hilfe des Energiesatzes den Betrag der Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion von φ .

b.) Berechnen Sie mit Hilfe des Drallsatzes für den Koordinatenursprung die Beschleunigung $\ddot{\varphi}$ als Funktion von φ .

c.) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulssatzes die Kraft N des Halms auf den Nagel als Funktion von φ.

d.) Bei welchem Winkel $\varphi_{\max}$ rutscht der Nagel aus dem Halm?



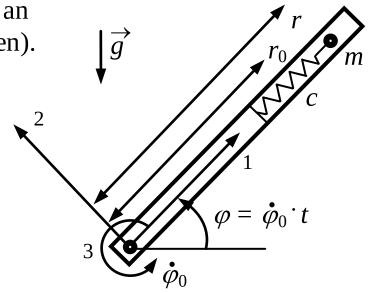
Aufgabe 1-14: In einem Rohr, welches mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ um die horizontale 3-Achse rotiert, kann eine an einer Feder (Federkonstante c) befestigte Punktmasse m reibungsfrei entlang der Rohrachse (der 1-Achse) schwingen (angeregt durch die auf die Masse wirkende Gravitationsbeschleunigung g). Die Lage der Punktmasse sei durch die „Polarkoordinaten" φ und r gegeben, dabei sei r_0 der zur ungespannten Feder gehörende Abstand. Für die Berechnung wird das skizzierte, mitbewegte Koordinatensystem verwendet.

a.) Geben Sie die Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Koordinatensystems sowie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ der Punktmasse m an (in Abhängigkeit von den Größen r, φ und deren zeitlichen Ableitungen).

b.) Geben Sie den Vektor der auf die Punktmasse wirkenden Federkraft $\vec{F}_c$ und den Vektor der auf die Masse wirkenden Schwerkraft $\vec{G}$ an.

c.) Stellen Sie mit Hilfe des Impulssatzes die Bewegungsgleichung für die Schwingung $r(t)$ auf.

d.) Berechnen Sie mit Hilfe des Drallsatzes für den Koordinatenursprung das für die Bewegung notwendige Drehmoment $\vec{M}$.

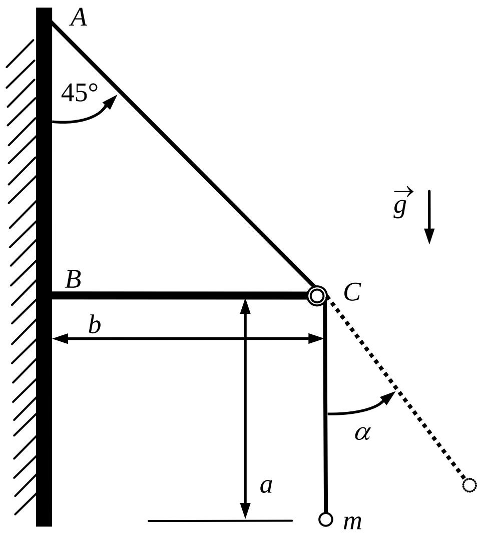


Aufgabe 1-15: Gegeben sei eine Punktmasse *m*, die an einem Seil hängt, welches im Punkt *A* an der Wand befestigt worden ist. Ein horizontaler Balken (Länge *b*) ist mit dem linken Ende *B* rechtwinklig an der Wand befestigt und hält am rechten Ende eine reibungsfrei drehbare Rolle *C*, mit welcher das Seil so von der Wand weggedrückt wird, dass der Winkel zwischen Seil und Wand 45° beträgt. Das überhängende Seil hat dann die Länge *a* und kann in der Zeichenebene Schwingungen ausführen (Winkel α).

a.) Berechnen Sie für den Fall, dass das Seil nicht schwingt, im Punkt *B* die Lagerreaktionen (F_H, F_V, M_B) des Balkens;

b.) Berechnen Sie für den Fall, dass das Seil schwingt, die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$ als Funktion von α und der Anfangsauslenkung α_o;

c.) Berechnen Sie für den Fall, dass das Seil schwingt, die Seilkraft *S* als Funktion von α und α_o .

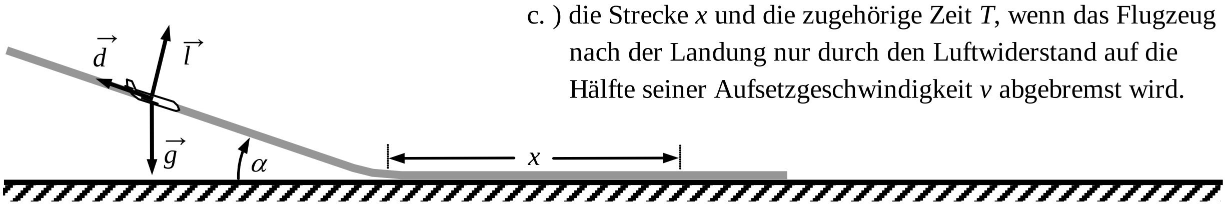


Aufgabe 1-16: Ein Flugzeug fliegt im Landeanflug mit ausgestelltem Motor unter dem Einfluss von der Gravitationsbeschleunigung ($g \approx 10$ m/s²) und den aerodynamischen Beschleunigungen Auftrieb *l* und Luftwiderstand *d*. Dabei sei *d* proportional zum Quadrat der (konstanten) Fluggeschwindigkeit *v*, also $d = k\,v^2$, mit $v = 30$ m/s. Berechnen Sie:

a.) den Gleitwinkel α für eine Sinkgeschwindigkeit von 3 m/s;

b.) den Wert der Konstanten *k* für diese Sinkgeschwindigkeit;

c.) die Strecke *x* und die zugehörige Zeit *T*, wenn das Flugzeug nach der Landung nur durch den Luftwiderstand auf die Hälfte seiner Aufsetzgeschwindigkeit *v* abgebremst wird.



Übungsaufgaben zum Kapitel 2 (Ebene Bewegungssysteme):

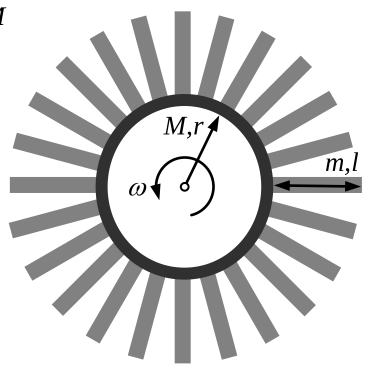
Aufgabe 2-1: Das Laufrad einer Turbine kann näherungsweise zusammengesetzt gedacht werden, bestehend aus einem dünnen Ring mit der Masse *M* und dem Radius *r* sowie aus 24 Laufschaufeln, Stäben der Masse *m* und der Länge *l*. Berechnen Sie:

a.) das Trägheitsmoment *J* für Drehungen um die Rotationsachse;

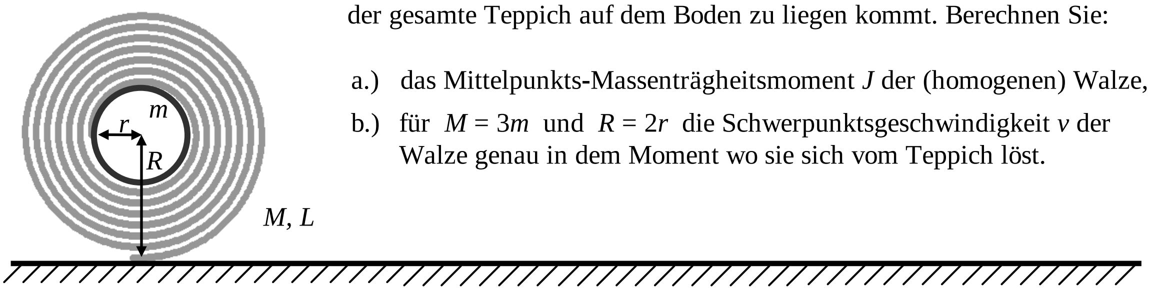
b.) die Kraft F_S in den Befestigungen der Schaufeln, wenn das Rad mit der konstanten Drehgeschwindigkeit ω_0 rotiert;

c.) die Drehgeschwindigkeit $\omega(t)$ als Funktion der Zeit *t*, wenn das Rad durch ein konstantes Bremsmoment *M* von der Anfangsdrehgeschwindigkeit ω_0 bis zum Stillstand abgebremst wird;

d.) die Zeit *T* für diesen Bremsvorgang.



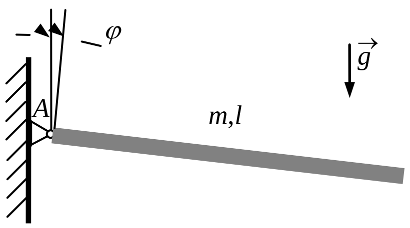
Aufgabe 2-2: Ein biegeschlaffer Teppich (Masse M, Länge L) ist auf einer Walze (Masse m, Radius r) aufgerollt, wobei die so entstehende Teppichrolle den Radius R erhält. Legt man nun diese Teppichrolle auf den horizontalen Boden, so rollt sie sich wieder auf, wobei die Walze beschleunigt bis schließlich der gesamte Teppich auf dem Boden zu liegen kommt. Berechnen Sie:



a.) das Mittelpunkts-Massenträgheitsmoment J der (homogenen) Walze,

b.) für $M = 3m$ und $R = 2r$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit v der Walze genau in dem Moment wo sie sich vom Teppich löst.

Aufgabe 2-3: Als bei einem horizontalen Tragbalken (Masse m, Länge l) das Halteseil reißt, bleibt der Balken nicht mehr horizontal, sondern fällt rechts nach unten (links trägt ihn das Gelenklager A). Zur Berechnung der Drehbewegung wird der Drehwinkel φ verwendet.



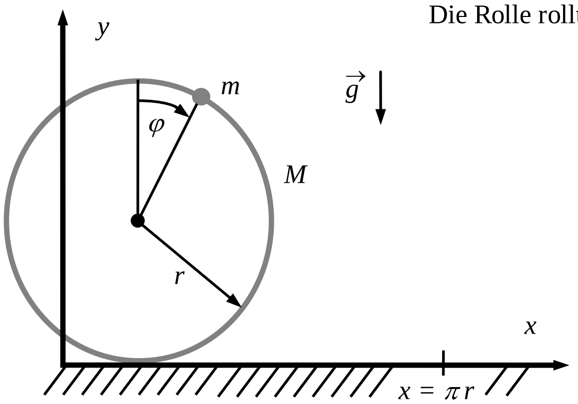
a.) Geben Sie den Drall L des Balkens (bezüglich A) als Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ an.

b.) Berechnen Sie mit Hilfe des Drallsatzes die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ als Funktion der Koordinate φ .

c.) Berechnen Sie mit Hilfe des Energiesatzes die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion von φ .

d.) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{\max}$ schlägt der Balken gegen die Wand?

Aufgabe 2-4: Eine Punktmasse m ist oben auf einem Hohlzylinder (Masse M, Radius r, Massenträgheitsmoment bezogen auf den Mittelpunkt $J_S = M r^2$) befestigt. Sie wird bei $x = 0$, $\varphi = 0$ stoßfrei losgelassen. Die Rolle rollt los, die Punktmasse berührt bei $x = \pi r$ den Boden.



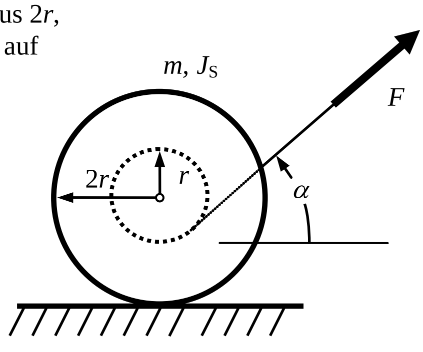
a.) Wieviele Freiheitsgrade hat die (ebene) Bewegung von m ?

b.) Bestimmen Sie die Bahnkurve $x(\varphi)$, $y(\varphi)$.

c.) Welche Geschwindigkeit $\dot{x}$ hat die Rolle, wenn die Punktmasse am Boden ankommt ($x = \pi r$, $y = 0$) ?

d.) Berechnen Sie die Vertikalbeschleunigung $\ddot{y}$ der Punktmasse m im Bodenberührpunkt.

Aufgabe 2-5: Eine Kabeltrommel (Innenzylinder-Radius r, Außenradius $2r$, Masse m, Trägheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt J_S) liegt so auf einer horizontalen Ebene, dass sie rollen kann wenn man leicht mit der Kraft F an dem heraushängenden Kabelende zieht (siehe Skizze). Ist der Winkel α klein (z.B. 0°), so rollt die Trommel nach rechts, ist α groß (z.B. 90°), so rollt sie nach links.



a.) Skizzieren Sie das Freikörperbild und tragen Sie sämtliche Kräfte vorzeichenrichtig in das Bild ein.

b.) Berechnen Sie die Horizontalbeschleunigung der Trommel.

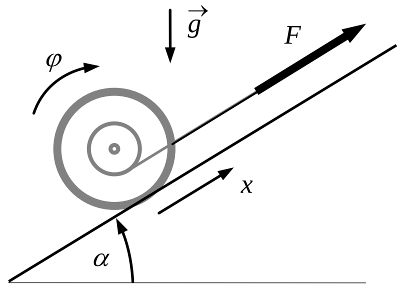
Aufgabe 2-6: Eine Kabeltrommel-Rolle (Masse m, Trägheitsmoment J_S, Innenradius r, Außenradius $2r$) wird am Kabelende mit der Kraft F eine schiefe Ebene (Neigungswinkel α) heraufgezogen.

a) Welche Kraft F_0 ist mindestens notwendig, damit die Rolle nicht herunterrollt, wenn zwischen der Rolle und der schiefen Ebene Haftreibung herrscht?

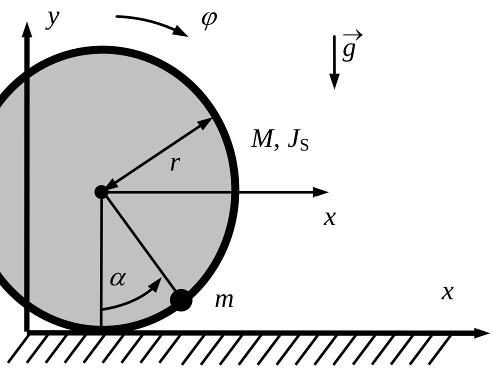
b) Berechnen Sie bei Haftreibung für $F_1 > F_0$ die Beschleunigung $\ddot{x}$.

c) Ermitteln Sie die Kraft F_2 für den Fall, dass Gleitreibung vorliegt (Beiwert μ) und die Rolle sich nur rotatorisch bewegt ($\ddot{x} = 0$).

d) Ermitteln Sie für den Fall c) die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$.



Aufgabe 2-7: In einer zylinderförmigen Rolle (Masse M, Radius r, Mittelpunkts-Trägheitsmoment J_S) hat sich eine Maus (Punktmasse m, Größe gegenüber r vernachlässigbar) versteckt. Die Maus rennt nicht seitlich wieder raus, sondern "bergauf", wodurch sich die Rolle in x-Richtung in Bewegung setzt. Dabei bleibt der Lagewinkel α gegenüber der Vertikalen konstant. Aufgabe ist es, die Horizontalbeschleunigung $\ddot{x}$ der Rolle zu berechnen.



a.) Skizzieren Sie das Freikörperbild für die Rolle und setzen Sie den Drallsatz an ($\varphi = x/r$).

b.) Skizziern Sie das Freikörperbild für die Maus und setzen Sie den Impulssatz an.

c.) Setzen Sie den Impulssatz für die Rolle mit der Maus an und

d.) berechnen sie die Beschleunigung $\ddot{x}$.

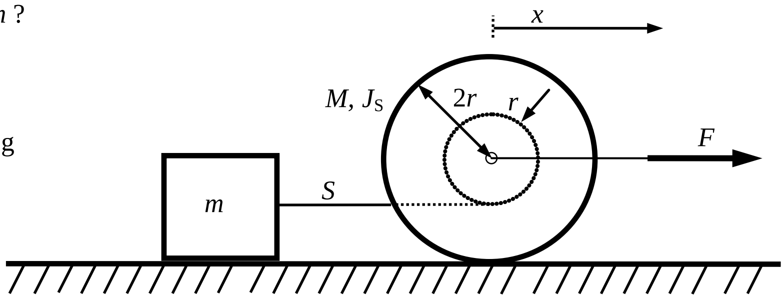
Aufgabe 2-8: Eine Trommel (Innenzylinderradius r, Außenradius $2r$, Masse M, (Mittelpunkts-) Massenträgheitsmoment $J_S = ½\, M\, r^2$) wird durch ein im Mittelpunkt befestigtes Seil in x-Richtung gezogen (Kraft F , Beschleunigung $\ddot{x}$) und zieht ihrerseits über ein um den Innenzylinder gewickeltes Seil S eine Masse m. Die Rolle rutscht nicht, der Reibwert zwischen Rolle M und Boden sowie zwischen Masse m und Boden sei gleichermaßen μ .

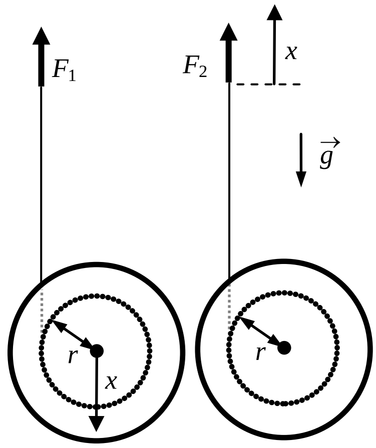
a.) Wie groß muß das Verhältnis M/m mindestens sein, damit die Masse m und nicht die Rolle M rutscht? (langsames Anziehen, Beschleunigung $\cong 0$)

b.) Um welchen Faktor beschleunigt die Rolle M schneller als die Masse m ?

c.) Berechnen Sie die Seilkraft S als Funktion der Beschleunigung $\ddot{x}$.

d.) Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}$ als Funktion der Kraft F.



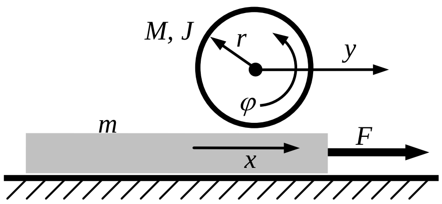


Aufgabe 2-9: Es sollen zwei verschiedene Fälle des Bewegungsverhaltens einer Jojo-Rolle untersucht werden: Im Fall 1 wird das Seil nach Loslassen der Rolle festgehalten, wobei die Rolle nach unten abrollt und im Seil die Kraft F_1 auftritt; im Fall 2 wird nach Loslassen der Rolle gerade so mit einer Kraft F_2 am Seil nach oben gezogen, dass sich die Rolle nur rotatorisch bewegt (ihr Mittelpunkt also nicht sinkt oder steigt). In beiden Fällen hat die Rolle die Masse M, den (Innen-) Radius r und das Mittelpunkts-Trägheitsmoment $J = M\,r^2$.

a.) Berechnen Sie die dazu zugehörigen Kräfte F_1 und F_2.

b.) Berechnen Sie für beide Fälle die Drehgeschwindigkeiten (Ω_1 und Ω_2); wenn sich Seil der Länge x abgewickelt hat.

c.) In welchem der beiden Fälle hat die Rolle mehr kinetische Energie (wenn sich Seil der Länge x abgewickelt hat).



Aufgabe 2-10: Eine Rolle (Masse M, Radius r, Mittelpunkts-Massenträgheitsmoment J) liegt auf einem flachen Blech (Masse m), welches reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene gleiten kann. Nun wird durch eine Kraft F das Blech horizontal nach rechts in Bewegung versetzt (Koordinate x), die Rolle wird dadurch etwas langsamer nach rechts mitgezogen (Koordinate y) und rollt relativ zum Blech nach links (Rollwinkel φ).

a.) Wieviele Freiheitsgrade hat die ebene Bewegung?

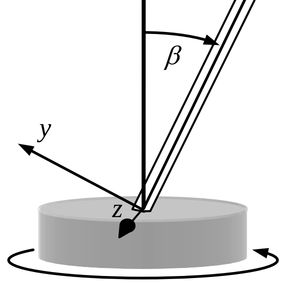
b.) Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen den Koordinaten x, y und φ an.

c.) Skizzieren Sie die Freikörperbilder von Blech und Rolle unter vorzeichenrichtiger Berücksichtigung der zwischen Rolle und Blech übertragenen Horizontalkraft F_R .

d.) Stellen Sie für die Rolle Dall- und Impulssatz und für das Blech den Impulssatz auf (nur für die horizontale Richtung).

e.) Berechnen Sie die Kraft F_R für die Werte $J = ½\,M\,r^2$ und $m = M/2$.

Übungsaufgaben zum Kapitel 3 (Rotordynamik):

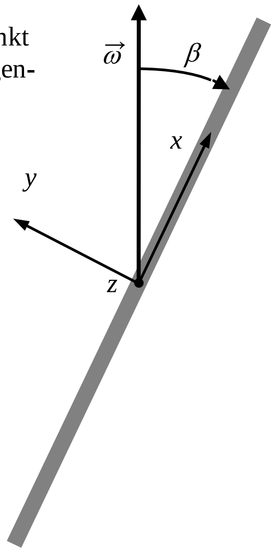


Aufgabe 3-1: Ein dünner Stab der Masse m und der Länge l ist im Winkel β mittig auf einem mit hoher (konstanter) Drehgeschwindigkeit ω rotierendem Drehteller befestigt (Gewichtskräfte sowie die Drehträgheit um die Stabachse seien vernachlässigbar klein). Berechnen Sie:

a.) die horizontale Schnittkraft in der Befestigung des Stabes,

für den Ursprung des skizzierten körperfesten Koordinatensystems:

b.) Drehgeschwindigkeitsvektor,Trägheitstensor und Drallvektor,
c.) das Schnittmoment in der Befestigung des Stabes.



Aufgabe 3-2: Ein Stab (Masse m, Länge l) rotiert um eine durch seinen Mittelpunkt gehende exakt vertikale Achse, die Stabachse ist aber immer um den Winkel β gegenüber der Drehachse geneigt. Der Betrag der Drehgeschwindigkeit ω sei konstant. Im körperfesten (x , y , z) Hauptachsensystem ist die Drehträgheit um die x-Achse vernachlässigbar klein, die Drehträgheit um die y- und z-Achse ist

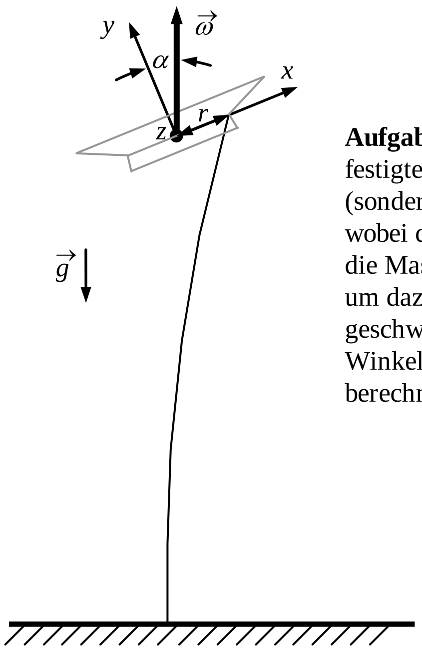
$$J_S = {}^1/_{12}\, m\, l^2 .$$

a.) Geben Sie den Drehvektor $\vec{\omega}$ an.

b.) Geben Sie den Drallvektor $\vec{L}$ an.

c.) Berechnen Sie den für die Bewegung notwendigen Momentenvektor $\vec{M}$.

Alle Vektoren sollen im körperfesten Koordinatensystem angegeben werden.



Aufgabe 3-3: Bei einer Zirkus-Attraktion wird ein Teller auf einen im Boden befestigten Stab gesetzt. Obwohl der Stab den Teller nicht im Schwerpunkt stützt (sondern im Abstand r davon), fällt der Teller nicht herunter, weil er nämlich rotiert, wobei der elastische Stab kreisförmige Biegeschwingungen ausführt. Der Teller hat die Masse m, sowie die Drehträgheiten ${}^1/_2\, mr^2$ um die Symmetrie-achse und ${}^1/_4\, mr^2$ um dazu senkrechte (schwerpunktsbezogenen) Achsen; er rotiert mit der Drehgeschwindigkeit ω um die Vertikale, welche gegen seine Symmetrieachse um den Winkel α geneigt ist (siehe Skizze). Aufgabe ist es, α als Funktion von ω zu berechnen. Ermitteln Sie für das skizzierte "tellerfeste" Koordinatensystem:

a.) die Komponentendarstellung des Drehgeschwindigkeitsvektors $\vec{\omega}$,

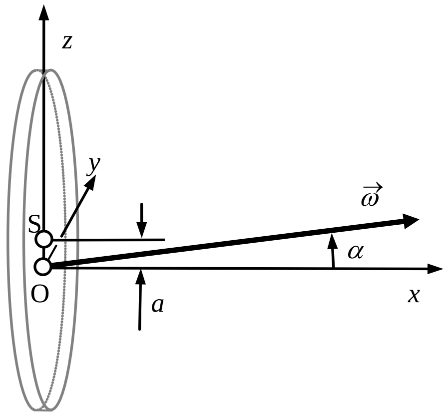
b.) den Trägheitstensor J_S des Tellers,

c.) seinen schwerpunktsbezogenen Drallvektor $\vec{L}$,

d.) (unter der Annahme, dass eine vom Stab eventuell auf den Teller übertragene horizontale Kraftkomponente ignoriert werden kann) das im Tellerschwerpunkt wirkende Moment $\vec{M}$ der Stützkraft und

e.) den Neigungswinkel α als Funktion der Drehgeschwindigkeit ω.

Aufgabe 3-4: Das Laufrad eines symmetrischen Meßkreisels (Masse m, Drehträgheit um die schwerpunkts-bezogene Drehachse A, um dazu senkrechte Achsen B) enthält durch Fertigungsungenauigkeiten eine „statische Unwucht“ (d.h. die raumfeste Drehachse geht nicht genau durch den Schwerpunkt S, sondern durch einen um a versetzten Punkt O) und eine „dynamische Unwucht“ (d.h. die Drehachse ist gegenüber der körperfesten Achse x um den Winkel α geneigt). Die Drehgeschwindigkeit ist auch im körperfesten x,y,z - Koordinatensystem konstant: $\vec{\omega} = (\omega \cos\alpha\ , 0,\ \omega \sin\alpha\ )$.



a.) Berechnen Sie den Vektor $\vec{v}$ der Schwerpunktsgeschwindigkeit.

b.) Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}$ der Schwerpunktsbeschleunigung.

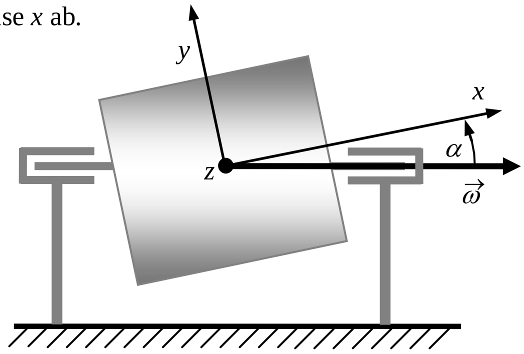
c.) Ermitteln Sie den durch die statische Unwucht verursachten Lagerkraftvektor $\vec{F}$.

d.) Geben Sie den Trägheitstensor J des Laufrades bezüglich O an.

e.) Geben Sie den Drallvektor $\vec{L}$ des Laufrades bezüglich O an.

f.) Ermitteln Sie den durch die dynamische Unwucht verursachten Lagermomentenvektor $\vec{M}$.

Aufgabe 3-5: Es sollen nun die Lagerreaktionen als Folge der Bewegung eines unsymmetrischen Rotors untersucht werden. Zur Berechnung wird ein körperfestes Hauptachsensystem x, y und z verwendet (der Koordinatenursprung sei im Schwerpunkt des Rotors, die Massenträgheitsmomente bezüglich der Achsen x, y und z seien A, B und C). Durch eine Fertigungsungenauigkeit weicht die Drehachse (Winkelgeschwindigkeit ω) um den Winkel α von der Hauptachse x ab.



a.) Geben Sie den Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ des Rotors an.

b.) Geben Sie den Trägheitstensor J des Rotors an.

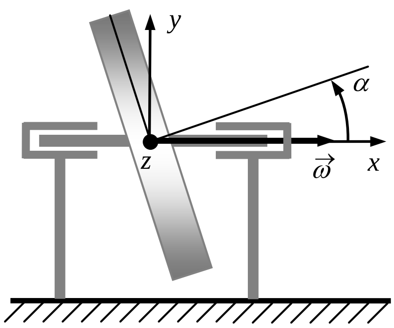
c.) Geben Sie den Drallvektor $\vec{L}$ (bez. des Schwerpunktes) an.

d.) Berechnen Sie Momentenvektor $\vec{M}$ der Lagerreaktionen durch die totale zeitliche Ableitung des Drallvektors $d\vec{L}/dt$.

e.) Für welches Verhältnis von A zu B verschwindet die dynamische Unwucht (d.h. für welches A/B ist $\vec{M} = 0$)?

Aufgabe 3-6: Aufgabe ist es, für einen Rotor die Hauptträgheitsmomente A, B und C sowie die zugehörigen Hauptachsenrichtungen zu bestimmen (Winkel α). Eine Messung für das skizzierte körperfeste (Nicht-) Hauptachsensystem x, y, z hat dabei folgenden Trägheitstensor ergeben:
(Dimensionen Kg m²)

$$J_s = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

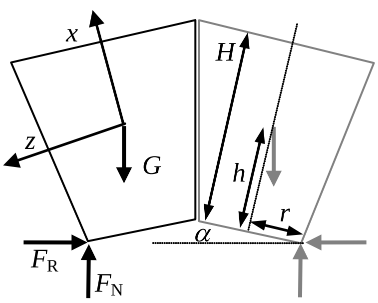


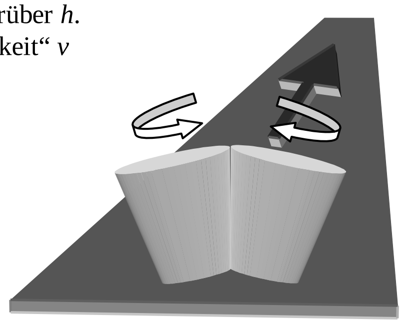
a.) Berechnen Sie das Lagermoment $\vec{M}$, wenn der Rotor wie skizziert mit der Drehgeschwindigkeit ω =100 rad/s auf der x-Achse rotiert.

b.) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente A, B und C des Rotors durch Lösung der Eigenwertaufgabe $J_s \cdot \vec{\omega} = \lambda \cdot \vec{\omega}$.

c.) Berechnen Sie den Neigungswinkel α der größten Hauptachse A.

Aufgabe 3-7: Zwei kegelstumpfförmige Behälter G=Mg werden wie skizziert winklig gegeneinander auf eine Unterlage (Laufband) gestellt und durch Reibung in ihrer Lage gehalten. Werden diese Behälter nun gegensinnig in gleichartige Rotation versetzt, so „laufen“ sie aneinander abrollend das Laufband entlang (vorausgesetzt, dass ausreichend Boden-Reibung die beiden Behälter zusammenhält).
Die Trägheitsmomente eines Behälters für Drehungen seien A (um die Symmetrieachse) und B (um schwerpunktsbezogene Achsen senkrecht zur Symmetrieachse). Für die Berechnung der Bewegung wird im linken Behälter ein schwerpunktsbezogenes Koordinatensystem verwendet, das die Drehbewegung des Behälters nicht mitmacht. Die Neigung der Behälter-Grundfläche sei α, ihr Radius r und die Höhe des Schwerpunkts darüber h. Die Behälterhöhe sei H . Berechnen Sie bei einer „Laufgeschwindigkeit“ v der Behälter für den linken Behälter:





a.) den mindestens erforderlichen Boden-Reibwert μ;

b.) den Trägheitstensor;

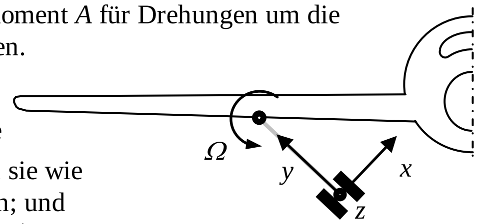
c.) den Drehgeschwindigkeitsvektor (Größe und Richtung);

d.) die kinetische Energie;

e.) den Drallvektor und

f.) das durch die absolute räumliche Änderung des Drallvektors entstehende Kreiselmoment.

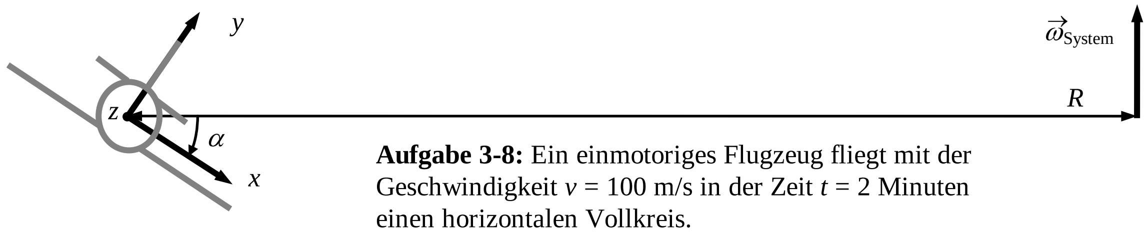
Aufgabe 3-8: Der Pilot hat vergessen, kurz die Bremse zu treten, bevor er unmittelbar nach dem Start das Fahrwerk des Flugzeugs einzieht. Die beiden schnell rotierenden Räder des Hauptfahrwerks (Radius r) haben zusammen das schwerpunktsbezogene Massenträgheitsmoment A für Drehungen um die Symmetrieachse (die x-Achse) und B für dazu senkrechte Achsen.



a.) Berechnen Sie die Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Räder, wenn das Flugzeug mit der Geschwindigkeit v abhebt; sowie

b.) den schwerpunktsbezogenen Drallvektor $\vec{L}$ der Räder, wenn sie wie skizziert mit der Drehgeschwindigkeit Ω eingezogen werden; und

c.) das durch die Einziehbewegung entstehende Kreiselmoment $\vec{M}$.

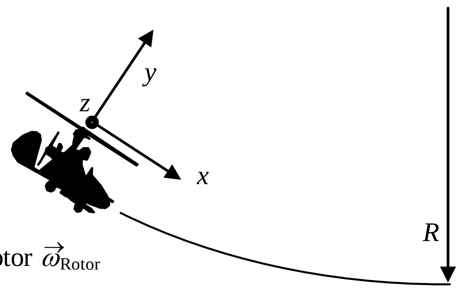


Aufgabe 3-8: Ein einmotoriges Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit v = 100 m/s in der Zeit t = 2 Minuten einen horizontalen Vollkreis.

a) Wie groß sind Kurvenradius R und vertikale Wendewinkelgeschwindigkeit ω_{System} ?

b) Motor und Propeller können zusammen als ein Rotor (Motordrehzahl Ω konstant) aufgefasst werden, der um die Flugzeuglängsachse z das Trägheitsmoment A und um dazu senkrechte, durch den Schwerpunkt gehende Achsen das Trägheitsmoment B besitzt. Berechnen Sie die zusätzlichen Steuermomente $\vec{M}$, die im Schwerpunkt aufgrund der Kreiselwirkung des Motors notwendig werden.

Aufgabe 3-9: Der Pilot eines Tragschraubers (Typ „007-Little Nellie") fliegt kurz vor dem Aufsetzen einen gefährlich engen Abfangbogen (Radius R, Fluggeschwindigkeit v). Dabei dreht der dreiblättrige Hauptrotor (Masse m) mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die y-Achse des flugzeugfesten Koordinatensystems, seine schwerpunktsbezogenen Massenträgheitsmomente seien A für Drehungen um die Symmetrieachse (die y-Achse) und B für dazu senkrechte Achsen. Berechnen Sie für das skizzierte flugzeugfeste Koordinatensystem:

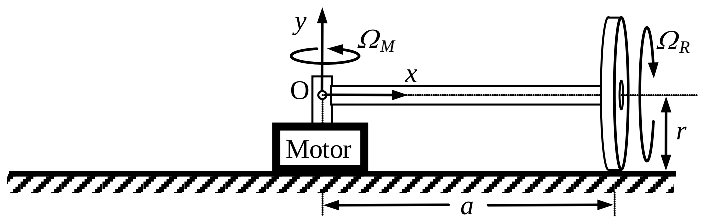


a.) die Drehgeschwindigkeitsvektoren von Flugzeug $\vec{\omega}_{\text{System}}$ und Rotor $\vec{\omega}_{\text{Rotor}}$

b.) den schwerpunktsbezogenen Drallvektor $\vec{L}$ des Hauptrotors,

c.) den Kreiselmomentenvektor $\vec{M}$ des Hauptrotors (im Schwerpunkt).

Aufgabe 3-10: Ein Motor treibt eine gewinkelte Antriebswelle mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω_M (um die y-Achse) an, auf welcher im horizontalen Abstand a ein Rad (Radius r) befestigt ist. Durch Bodenreibung rotiert das Rad mit der Relativ-Drehgeschwindigkeit Ω_R um die Welle (x-Achse), es hat die Masse m, die Drehträgheiten $A = \frac{1}{2} m\, r^2$ um die x-Achse und $B = \frac{1}{4} m\, r^2$ um dazu senkrechte (schwerpunktsbezogene) Achsen. Tragen Sie den für diese Abrollbewegung (gedachten) raumfesten "Spacecone" und den körperfesten "Bodycone" in die Skizze ein und ermitteln Sie für das skizzierte Koordinatensystem:



a.) Ω_R als Funktion von Ω_M ;

b.) Trägheitstensor J_O und

c.) Drallvektor $\vec{L}_O$;

d.) das Kreiselmoment $\vec{M}_O$ der Bewegung.

Aufgabe 3-11: Ein "reiszweckenförmiger" Körper besteht aus einem masselosen Stift der Länge l und einer dünnen homogenen Scheibe mit der Masse m und dem Radius r (also $\tan\alpha = r/l$). Er wird auf der horizontalen Ebene in eine Roll-Bewegung versetzt, wobei der Stift mit seiner Spitze die Unterlage noch berührt. Die x-Achse des verwendeten Koordinatensystems ist immer im Stift, die z-Achse zeigt immer horizontal, die Winkelgeschwindigkeit des Koordinatensystems beträgt Ω (also $\vec{\omega}_{\text{System}} = (-\Omega\sin\alpha, -\Omega\cos\alpha, 0)$).
Berechnen Sie:

a.) die Relativdrehgeschwindigkeit des Körpers um die x-Achse $\vec{\omega}_{\text{Relativ}}$,

b.) den Vektor der Drehgeschwindigkeit des Körpers $\vec{\omega}_{\text{Körper}}$,

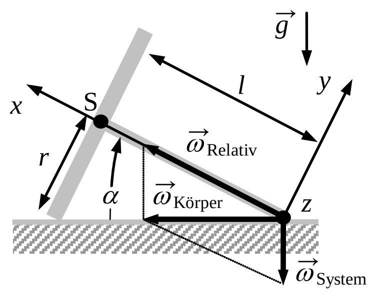
c.) den Betrag der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S,

d.) das Trägheitsmoment A für Drehungen um die x-Achse,

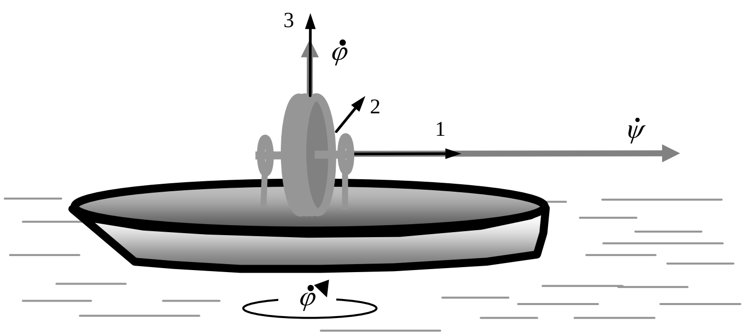
e.) das Trägheitsmoment B für die y- und die z-Achse,

f.) den Drallvektor $\vec{L}_O$ für den Koordinatenursprung.

g.) den Wert von Ω, bei welchem der Stift vom Boden abhebt.



Aufgabe 3-12: Um Schlingerbewegungen (= Drehungen um die Vertikale) eines Schiffes zu messen, wird ein Meßkreisel verwendet (Drehträgheit A um die Kreiselachse, B um dazu senkrechte schwerpuntsbezogene Achsen), welcher mit der konstanten Drehgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um die horizontale 1-Achse rotiert (zur Berechnung wird das skizzierte „schiffsfeste“ Koordinatensystem mit der stets vertikalen 3-Achse und der stets horizontalen 1-2 Ebene verwendet, Lagewinkel φ).



a.) Geben Sie die Drehgeschwindigkeiten von Kreisel $\vec{\omega}_{\text{Kreisel}}$ und Koordinatensystem $\vec{\omega}_{\text{System}}$ an.

b.) Berechnen Sie den (schwerpunkts-bezogenen) Drallvektor $\vec{L}$ des Kreisels.

c.) Ermitteln Sie das Kreiselmoment M_2 erzeugt durch Schlingerbewegungen $\dot{\varphi}$.

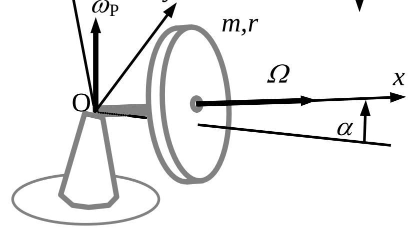
d.) und das Kreiselmoment M_3 verursacht durch Drehbeschleunigungen $\ddot{\varphi}$.

Aufgabe 3-13: Ein Spielzeugkreisel (Masse m, Radius r, Abstand $s = r/2$ von Fixpunkt O zu Schwerpunkt S) wird in Rotation versetzt (konstante Drehgeschwindigkeit Ω) und nutationsfrei so auf seine Stütze gesetzt, daß seine Drehachse mit der Horizontalen den Winkel α aufspannt. Aufgabe ist es, den Wert der Präzessionsgeschwindigkeit ω_P (um die Vertikale) zu berechnen. Zur Berechnung wird ein mitgeführtes Koordinatensystem verwendet (x-Achse immer Symmetrieachse des Kreisels, y-Achse immer horizontal).
Gegeben seien die Drehträgheit $A = \frac{1}{2} m r^2$ um die Kreisel-Symmetrieachse und die Drehträgheit $B = \frac{1}{4} m r^2$ um dazu senkrechte (schwerpunktsbezogene!) Achsen.

a.) Geben Sie den Drallvektor $\vec{L}_O$ (bezogen auf den Punkt O) an (als Funktion vom Ω und ω_P).

b.) Geben Sie den Kreiselmomentenvektor $\vec{M}_O$ an (d.h. die durch das Kreiselgewicht verursachte Lagerreaktion).

c.) Ermitteln Sie den Betrag der Präzessionsgeschwindigkeit ω_P durch Gleichsetzen totalen zeitlichen Ableitung des Drallvektors $d\vec{L}_O/dt$ mit dem Moment $\vec{M}_O$ der Auflagerkraft.



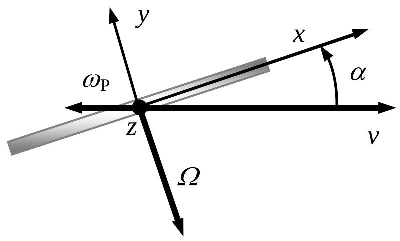
Aufgabe 3-14: Ein (Filz-) Bierdeckel (Masse *m*, Radius *r*), von einem Rechtshänder geworfen, fliegt mit der Horizontalgeschwindigkeit *v* (Anstellwinkel α) und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um seine nach unten zeigende Symmetrieachse (siehe Skizze). Dabei führt er eine PräzessionsDrehbewegung ω_P um die nach hinten zeigende Horizontale aus.

a.) Berechnen Sie die Trägheitsmomente für das gezeichnete Koordinatensystem und geben Sie den Trägheitstensor J_S an.

b.) Berechnen Sie den schwerpunktsbezogenen Drall $\vec{L}_S$,

c.) das einwirkende aerodynamische Moment $\vec{M}_S$ und

d.) die gesamte kinetische Energie *E* des Deckels.



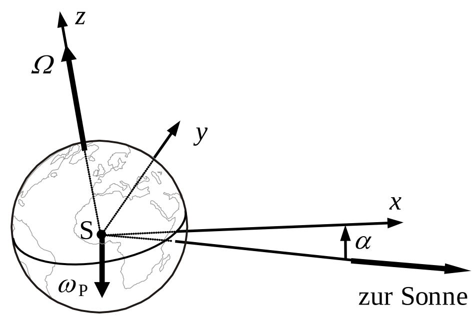
Aufgabe 3-15: Die Achse der Erdrotation Ω ist um den Winkel α gegen die Ekliptik geneigt, weil jedoch die Erde durch diese Rotation zu einem abgeplatteten Kreisel wird, (Trägheitsmoment *B* für Drehungen um die Nord-Süd Achse, Trägkeitsmoment $A < B$ für Drehungen um Achsen in der Äquatorialebene), führt die Erdrotationsachse im zentralen Schwerefeld der Sonne eine (sehr langsame) Präzessionsbewegung ω_P (senkrecht zur Ekliptik) aus. Zur Berechnung dieser wird ein mitgeführtes Koordinatensystem verwendet (die *z*-Achse vom Erdmittelpunkt O in Nordrichtung, die *y*-Achse immer in der Ekliptik, die *x*-Achse immer um α gegen die Ekliptik geneigt).
(Zahlenwerte: $\Omega = 2\pi/\text{Tag}$, $\alpha \approx 23.44°$, $B \approx {}^2/_5\, M R^2$, $A \approx 0.997 \cdot B$, $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6.378 \cdot 10^6$ m)

a.) Geben Sie den Trägheitstensor J_S der Erde an.

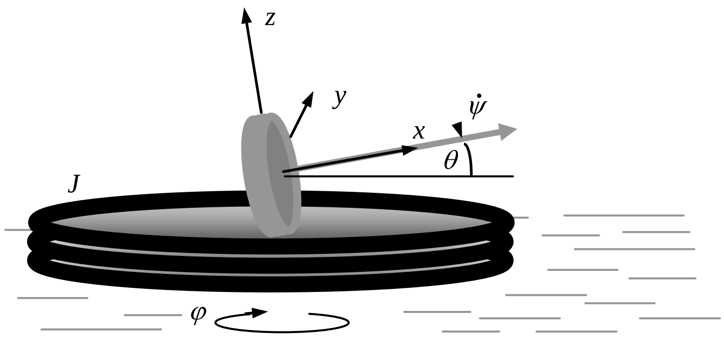
b.) Geben Sie den Drallvektor $\vec{L}_S$ der Erde an (als Funktion von Ω und ω_P).

c.) Um welche Achse muss der Momentenvektor $\vec{M}_S$ wirken, damit die Erdachse die angegebene Präzessionsbewegung ω_P ausführt (verursacht durch Gezeitenwirkungen von Sonne und Mond).

d.) Ermitteln Sie den Betrag des Momentes $\vec{M}_S$ notwendig für diese Präzessionsbewegung ω_P (d.h. berechnen Sie die totale zeitliche Ableitung des Drallvektors $d\vec{L}_S/dt$ der Erde).



Aufgabe 3-16: Ein Stellkreisel wird vorgesehen, um eine im Wasser schwimmende Bade-Insel (Drehträgheit *J*) ohne Verletzungsgefahr für Badende um die Vertikale drehen zu können. Das Laufrad des symmetrischen Stellkreisels (Drehträgheit *A* um die Symmetrieachse) dreht dabei schnell mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$, die Drehachse kann um den kleinen Winkel θ nach oben geschwenkt werden.



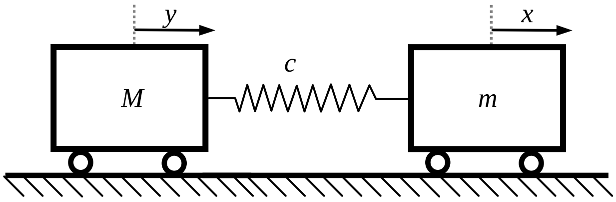
a.) Wie groß ist der Drall $\vec{L}$ des Laufrades, wenn der Winkel θ klein ist und klein bleibt. Geben Sie $\vec{L}$ nach Richtung und Größe an.

b.) Welches Moment $\vec{M}$ ist erforderlich, um die Bade-Insel mit der Drehbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ in Bewegung zu versetzen? Geben Sie $\vec{M}$ nach Richtung und Größe an.

c.) Ermitteln Sie die Drehgeschwindigkeit $\dot{\theta}$, welche notwendig ist um das Moment $\vec{M}$ zu erzeugen. (dabei kann angenommen werden, dass θ klein ist und klein bleibt, und dass die horizontale *y*-Achse der Kreisels die Richtung zum Raum etwa beibehält).

Übungsaufgaben zum Kapitel 4 (Schwingungen):

Aufgabe 4-1: Verbunden mit einer Feder c können zwei unterschiedlich große Massen M und m Schwingungen ausführen.



a.) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die gekoppelten Bewegungen x und y der Massen auf.

b.) Berechnen Sie die Eigenfrequenz der Schwingung des Abstandes $z = x–y$ der beiden Massen.

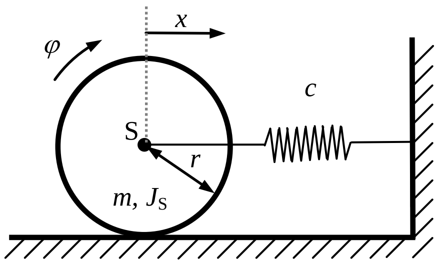
Aufgabe 4-2: Eine Walze (Radius r, Masse m, schwerpunktsbezogenes Trägheitsmoment $J_S = ½\ m\ r^2$) ist wie skizziert im Mittelpunkt S über eine horizontale Feder (Steifigkeit c) mit der Wand verbunden und kann so kleine Schwingungen ausführen.

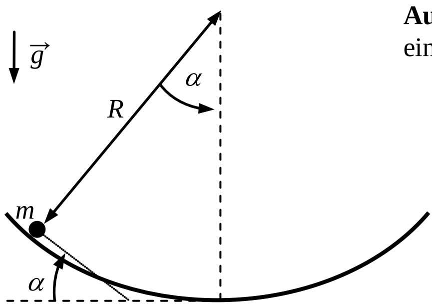
a.) Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen dem Rollwinkel φ und der Schwerpunktskoordinate x an.

b.) Zeichen Sie das Freikörperbild und tragen Sie alle auf die Walze wirkenden Kräfte ein.

c.) Stellen Sie mit Hilfe von Impuls- und Drallsatz die Bewegungsgleichung der linearen Schwingung $x(t)$ auf.

d.) Berechnen Sie die Eigenfrequenz ν dieser Schwingung.





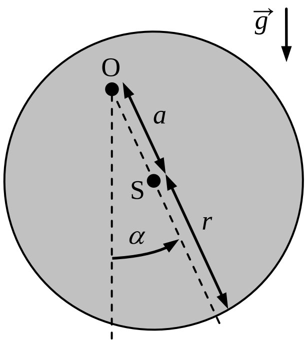
Aufgabe 4-3: Eine kleine Kugel (Masse m, Radius r) rollt im Inneren einer Kugelschale mit dem Radius R (ebene Bewegung, $R >> r$)

a.) Geben Sie das Trägheitmoment J der Kugel an.

b.) Berechnen Sie die Hangabtriebs-Beschleunigung $\ddot{x} = R\ \ddot{\alpha}$ der kleinen Kugel als Funktion des Winkels α.

c.) Berechnen Sie die Schwingungsfrequenz ν, mit welcher die kleine Kugel um den tiefsten Punkt der Schale schwingt.

Aufgabe 4-4: Eine homogene Kreisscheibe (Masse m, Radius r) wird im Abstand a zum Mittelpunkt S so aufgehängt, dass sie wie skizziert im Erdschwerefeld $\vec{g}$ um den Fixpunkt O reibungsfrei schwingen kann.



Ermitteln Sie:

a.) die Drehträgheitsmomente J_S (für den Schwerpunkt) und J_O (für den Fixpunkt),

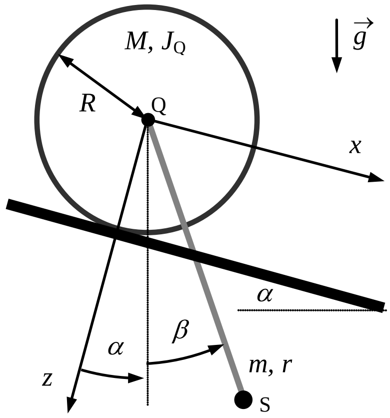
b.) die Differentialgleichung der Körperpendelschwingung für die Auslenkung α ,

c.) die Schwingungsfrequenz ν für kleine Schwingungsamplituden,

d.) die Vergleichslänge l_R eines Fadenpendels der gleichen Schwingungsfrequenz,

e.) den Abstand a (als Funktion von r), bei dem sich eine kleine Änderung von a (z.B. durch Fertigungsungenauigkeiten) nur wenig auf die Schwingungsfrequenz auswirken würde.

Aufgabe 4-5: Ein Fadenpendel (Punktmasse m, Schwerpunkt S, Fadenlänge r) ist im Schwerpunkt Q einer homogenen Walze (Masse M, Massenträgheitsmoment $J_Q = \frac{1}{2} M R^2$) befestigt, welche auf die schiefe Bahn geraten ist (Winkel α). Das Fadenpendel kann in der Zeichenebene (x-z-Ebene) Schwingungen ausführen (Winkel β). Die Walze ist viel schwerer als das Pendel, d.h. die Pendelschwingung beeinflusst die Bewegung der Walze nicht ($M >> m$).



a.) Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}_Q$ der Walze in x-Richtung.

b.) Wie lautet der Ortsvektor $\vec{r}_{QS}$ der Punktmasse m im skizzierten, mitbeschleunigten Koordinatensystem?

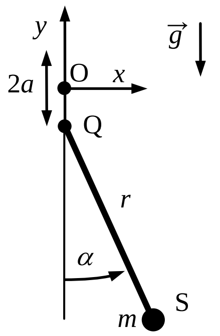
c.) Berechnen Sie den Relativdrall $\vec{L}_Q$ des Pendels in Bezug auf Q.

d.) Berechnen Sie den Momentenvektor $\vec{M}_Q$ der auf das Pendel wirkenden Gewichtskraft $m\vec{g}$ im Punkt Q.

e.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Pendelschwingung auf.

f.) Für welchen Winkel $\beta(\alpha)$ schwingt das Pendel bei der „beschleunigten Talfahrt" nicht?

Aufgabe 4-6: Ein Pendel, bestehend aus der Punktmasse m (im Punkt S) und einem gewichtslosen Draht der Länge r, kann in der vertikalen x-y-Ebene Schwingungen ausführen (Auslenkung α). Es ist im Punkt Q reibungsfrei befestigt, wobei der Punkt Q um den Koordinatenursprung O eine harmonische Vertikal-Schwingungen $y(t) = a \sin \omega t$ ausführt.



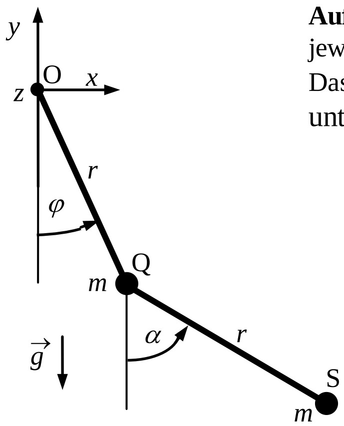
a.) Berechnen Sie den Ortsbeschleunigungsvektor $\vec{a}_Q$ des Punktes Q.

b.) Geben Sie den relativen Ortsvektor $\vec{r}_{QS}$ des Punktes S in Bezug auf den beschleunigt bewegten Punkt Q an (als Funktion des Winkels α).

c.) Berechnen den Relativdrall $\vec{L}_Q$ der sich bewegenden Punktmasse (Punkt S relativ zum Punkt Q) als Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$.

d.) Geben Sie den Momentenvektor $\vec{M}_Q$ im Punkt Q der Gewichtskraft mg an.

e.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Pendelschwingung auf.



Aufgabe 4-7: Ein Doppelpendel besteht aus zwei gleichen Teilenstücken mit jeweils einer Punktmasse m und einem masselosen Stab der Länge r.
Das obere Teil führt Schwingungen um den Fixpunkt O aus (Winkel φ), das untere Teil führt Schwingungen um den bewegten Punkt Q aus (Winkel α).

a.) Stellen Sie über den Drallsatz für das untere Teilstück (bewegter Bezugspunkt Q) und über den Drallsatz für beide Teilstücke (fester Bezugspunkt O) die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels auf.

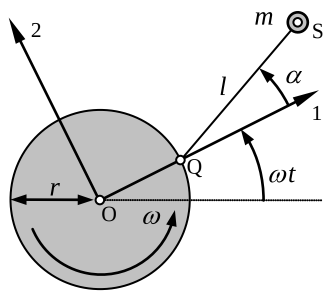
b.) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen und berechnen Sie die Frequenzen der Eigenschwingung.

OTH Regensburg, Prüfung B-DYN-TM3 (PA), SS 2017, 24. Juli 2017, 11:00

Prof.Dr.Schlingloff, Arbeitszeit 120 Minuten, 4 Aufgaben

Name/Semester: Punkte: Note:

Aufgabe 1: Am Rand einer um die vertikale 3-Achse mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Kreisscheibe (Radius r) ist ein Drahtpendel (Punktmasse m, Drahtlänge l) reibungsfrei befestigt, das in der horizontalen 1-2 Ebene Schwingungen ausführen kann (Winkel α). Ermitteln Sie für das skizzierte mitbewegte Koordinatensystem:



a.) den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ des Koordinatensystems,

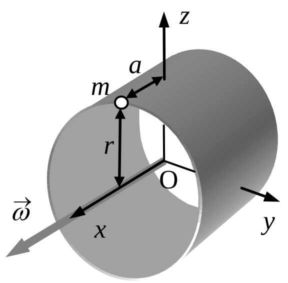
b.) Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Vektoren des Befestigungspunktes Q (d.h. $\vec{r}_{OQ}$, $\vec{v}_Q$, $\vec{a}_Q$),

c.) Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Vektoren der Punktmasse m (im Punkt S, d.h. $\vec{r}_{OS}$, $\vec{v}_S$, $\vec{a}_S$),

d.) den relativen Ortsvektor $\vec{r}_{QS}$, den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{S,\mathrm{relativ}}$ sowie den Relativdrall $\vec{L}_Q$ (bezogen auf den bewegten Punkt Q),

e.) die Bewegungsgleichung über den Drallsatz für den Punkt Q und

f.) die Frequenz der Pendelschwingung für kleine Amplituden.



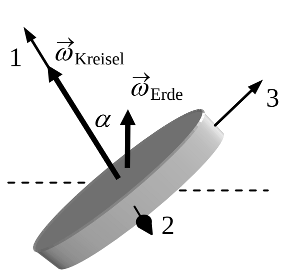
Aufgabe 2: An einem rohrähnlichen Rotationskörper (Radius r, Drehträgheit um die (Symmetrie-) x-Achse A, um dazu senkrechte, schwerpunktsbezogene Achsen B) wird im x-Abstand a eine Punktmasse m befestigt, danach wird der Körper um die x-Achse in konstante Rotation versetzt (Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$). Berechnen Sie:

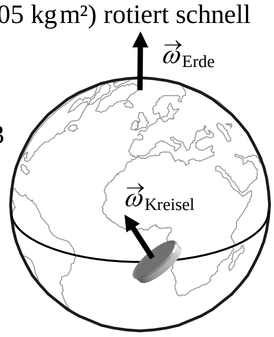
a.) den Drallvektor $\vec{L}_O$ im Ursprung des mitrotierenden Koordinatensystems,

b.) das für die Rotation notwendige Moment $\vec{M}_O$ im Koordinatenursprung und

c.) die Kraftwirkung $\vec{F}$ dieser Rotationsbewegung.

Aufgabe 3: Das Laufrad eines kardanisch aufgehängten Kreiselkompasses für die Schifffahrt (Drehträgheit um die Symmetrieachse $A = 0.001$ kg m², um dazu senkrechte schwerpunktsbezogene Achsen $B = 0.0005$ kg m²) rotiert schnell ($\omega_{\mathrm{Kreisel}}$= 1000 Umdrehungen/Minute) und richtet seine Achse selbstständig aber sehr langsam auf geographisch Nord aus (ω_{Erde}=1 Umdrehung/Tag, in der 1-3 Ebene des skizzierten Koordinatensystems, Fehlweisung α). Berechnen Sie:





a.) den schwerpunktsbezogenen Drallvektor $\vec{L}_S$ des Kreisels;

b.) den Kreiselmomentenvektor $\vec{M}_S$ (um die 2-Achse);

c.) zahlenwertmäßig für einen Winkel von $\alpha = 30°$ den Betrag des Kreiselmomentes ($\omega_{\mathrm{Erde}}^2 \approx 0$).

Aufgabe 4: Ein Sportflugzeug (Masse $M = 1000$ kg) hat bei einer Fluggeschwindigkeit $v = 66$ Knoten (≈ 33 m/s) eine typische Gleitzahl von 10, d.h. antriebslos könnte es bei einer Flughöhe von $h = 1$ km noch etwa 10 km gleiten.

a.) Wie lange dauert dieser Gleitflug (in Sekunden) und welche Energiemenge in kJ wird dabei etwa umgesetzt;

b.) welche Vortriebsleistung in kW wäre dann in etwa für den Horizontalflug mit dieser Geschwindigkeit erforderlich;

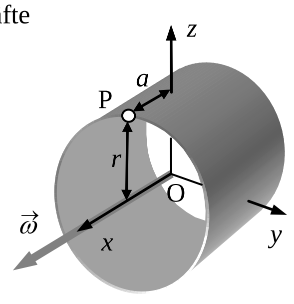
c.) und wie groß wäre dann die dazu nötige Vortriebskraft (= Fahrtwiderstandskraft) in N.

OTH Regensburg, Prüfung B-DYN (PA/BE), WS 2017/18, 8. Feb 2018, 16:00

Prof.Dr.Schlingloff, Arbeitszeit 120 Minuten, 4 Aufgaben

Name/Semester: Punkte: Note:

Aufgabe 1: An einem rohrähnlichen Rotationskörper (Radius r) wird im Punkt P (x-Abstand a) eine Punktmasse m befestigt, danach wird der Körper um die x-Achse in Rotation versetzt. Gewichtskräfte können bei hoher Drehgeschwindigkeit (ω konstant) vernachlässigt werden.



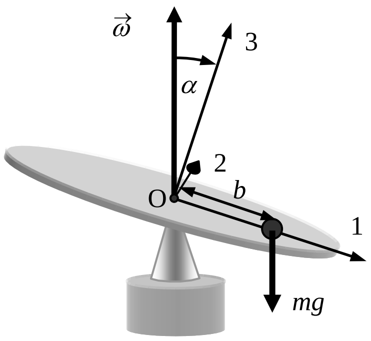
Ermitteln Sie für das skizzierte mitbewegte Koordinatensystem:

a.) den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ dieser Drehbewegung,

b.) die Vektoren für Ort, Geschwindigkeit und Ortsbeschleunigung der Punktmasse m (d.h. $\vec{r}_{OP}$, $\vec{v}_P$, $\vec{a}_P$),

c.) die auf die Punktmasse wirkende Kraft $\vec{F}$,

d.) den Absolutdrall $\vec{L}_O$ der Punktbewegung im Koordinatenursprung.



Aufgabe 2: Eine im Mittelpunkt unterstützte symmetrische Kreisscheibe rotiert schnell um die Vertikale (ω konstant). Auf ihr befindet sich im Abstand b die Punktmasse m; Kreisscheibe und Punktmasse zusammen haben im skizzierten mitrotierenden (Hauptachsen-) Koordinatensystem die Drehträgheiten :

B (um die 1-Achse), $B+mb^2$ (um die 2-Achse) und $A+mb^2$ (um die 3-Achse).

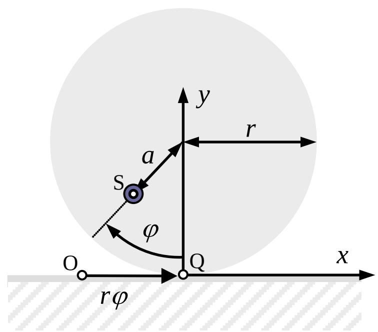
Das Moment der Gewichtskraft bewirkt nun, dass die 3-Achse der Scheibe um den Winkel α von der vertikalen Drehachse abweicht. Berechnen Sie:

a.) das Moment $\vec{M}_O$ der Gewichtskraft mg im Koordinatenursprung,

b.) den Drallvektor $\vec{L}_O$ von Scheibe und Punktmasse sowie

c.) den Winkel α als Funktion der Drehgeschwindigkeit ω.

Aufgabe 3: Innen in einer als masselos zu betrachtenden Styrophorkugel (Radius r) befindet sich am Punkt S eine Punktmasse m (Mittelpunktsabstand a). Wenn die Kugel Roll-Schwingungen ausführt (Winkel φ), dann wird der Bodenberührpunkt Q um den Abstand $r\varphi$ horizontal (in x-Richtung) bewegt.
Aufgabe ist es nun, die Schwingungs-Differentialgleichung über den Drallsatz für den beschleunigten Punkt Q (Horizontalbeschleunigung $r\ddot{\varphi}$) aufzustellen.



Berechnen Sie für den Bezugspunkt Q des skizzierte Koordinatensystems:

a.) den relativen Ortsvektor $\vec{r}_{QS}$ der Punktmasse m,

b.) ihren relativen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_S$,

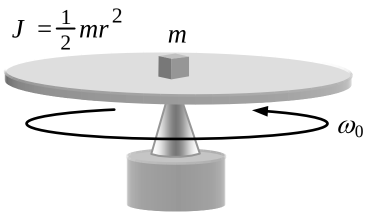
c.) ihren Relativdrall $\vec{L}_Q$ und seine Ableitung $\dot{\vec{L}}_Q$,

d.) den Schwerpunkts-Trägheitsterm $\vec{r}_{QS} \times m\,\vec{a}_Q$,

e.) das Moment $\vec{M}_Q$ der Gewichtskraft mg.

f.) Stellen Sie die Schwingungsgleichung auf und berechnen Sie die Frequenz ν_O für kleine Amplituden ($\varphi \ll 1$).

Aufgabe 4: Eine Scheibe (Drehträgheitsmoment $J = ½\, m\, r^2$) rotiert antriebslos und reibungsfrei um die Vertikale (Drehgeschwindigkeit ω_0). In ihrer Mitte befindet sich eine Punktmasse m.



a.) Berechnen Sie die kinetische Energie E und den Drall L der Scheibe.

Nun rutscht die Punktmasse m langsam zum Scheibenrand (Radius r).

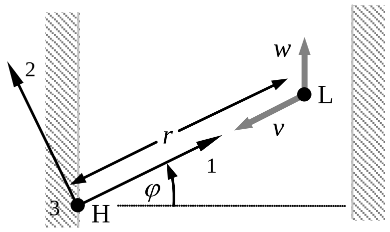
b.) Berechnen Sie die jetzt geringere Drehgeschwindigkeit ω_1 sowie
c.) die beim Rutschvorgang entstandenen Reibungswärme W.

OTH Regensburg, Prüfung B-DYN (PA/BE), SS 2018, 23. Juli 2018, 8:30

Prof.Dr.Schlingloff, Arbeitszeit 120 Minuten, 4 Aufgaben

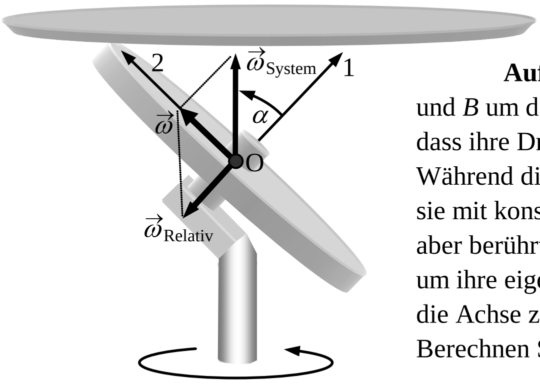
Name/Semester: Punkte: Note:

Aufgabe 1: Rauhaardackel Lumpi (L) erkennt am gegenüberliegenden Flussufer sein Herrchen (H), springt sofort ins Wasser und schwimmt mit konstanter (Relativ-) Geschwindigkeit v auf sein Herrchen zu, wird aber dabei von der (ebenso konstanten) Fließgeschwindigkeit des Wassers w abgetrieben. Ermitteln Sie für Lumpi's Position r, φ im skizzierten ("Polar"-) Koordinatensystem als Funktion der Geschwindigkeiten v und w :



a.) Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_L = (\dot{r}\,,\, r\dot{\varphi}\,,\, 0\,)$,

b.) sowie die Komponenten des Ortsbeschleunigungsvektors $\vec{a}_L$.



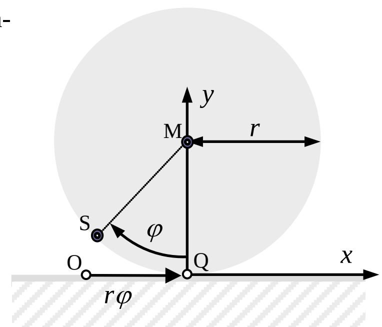
Aufgabe 2: Eine dünne Kreisscheibe (Trägheit A um die Drehachse und B um dazu senkrechte Achsen) ist so auf einer Drehhalterung gelagert, dass ihre Drehachse um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt ist. Während die Scheibe die obere Deckenplatte zunächst noch nicht berührt rotiert sie mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}_{System}| = \omega$ um die Vertikale. Dann aber berührt sie die Deckenplatte, erfährt zusätzlich eine Relativdrehung $\vec{\omega}_{Relativ}$ um ihre eigene Drehachse (in negativer 1-Richtung) und rotiert nun folglich um die Achse zwischen Mittelpunkt O und aktuellem Berührpunkt (die 2-Achse). Berechnen Sie für die Scheibe im skizzierten mitbewegten Koordinatensystem:

a.) die Drehgeschwindigkeitsvektoren $\vec{\omega}_{System}$ und $\vec{\omega}_{Relativ}$ (als Funktion von ω und α),

b.) das Lagermoment $\vec{M}_O$ wenn die Scheibe die Deckenplatte nicht berührt ($\vec{\omega}_{Relativ} = 0$),

c.) das (Kreisel-) Lagermoment $\vec{M}_O$ wenn die Scheibe auf der Platte abrollt ($\vec{\omega}_{Relativ} \neq 0$).

Aufgabe 3: Innen in einer als masselos zu betrachtenden Styrophorkugel (Radius r) befinden sich zwei gleichartige Punktmassen m; die eine im Mittelpunkt M und die andere im Oberflächenpunkt S. Wenn die Kugel Roll-Schwingungen ausführt (Winkel φ), dann wird der Bodenberührpunkt Q um den Abstand $r\varphi$ horizontal (in x-Richtung) bewegt. Aufgabe ist es nun, die Schwingungs-Differentialgleichung über den Drallsatz für den beschleunigten Punkt Q (Horizontalbeschleunigung $r\ddot{\varphi}$) aufzustellen.



Berechnen Sie für den Bezugspunkt Q des skizzierten Koordinatensystems:

a.) die relativen Ortsvektoren $\vec{r}_{QM}$ und $\vec{r}_{QS}$ der beiden Punktmassen m ,

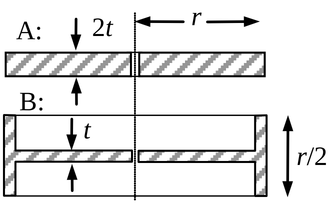
b.) ihre relativen Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_M$ und $\vec{v}_S$,

c.) ihre Relativdralls $\vec{L}_{QM}$ und $\vec{L}_{QS}$ sowie deren Ableitungen $\dot{\vec{L}}_{QM}$ und $\dot{\vec{L}}_{QS}$,

d.) den Schwerpunkts-Trägheitsterm ($\vec{r}_{QM} + \vec{r}_{QS}$) $\times\, m\, \vec{a}_Q$,

e.) das Moment $\vec{M}_Q$ der im Punkt S wirkenden Gewichtskraft mg .

f.) Stellen Sie die Schwingungsgleichung auf und berechnen Sie die Frequenz ν_O für kleine Amplituden ($\varphi \ll 1$).



Aufgabe 4: Die beiden im Schnitt gezeichneten sehr dünnwandigen Schwungscheiben ($t << r$) sind gleichschwer (Materialdichte ρ) und bestehen A: aus einer einzelnen Kreisscheibe (Radius r, Wandstärke $2t$) und B: aus einer Kreisscheibe der Stärke t mit angeschweißtem Reifen (Breite $r/2$, Radius r, Wandstärke ebenfalls t). Berechnen Sie:

a.) die Trägheitsmomente J_A und J_B für Drehungen um die Symmetrieachse, und

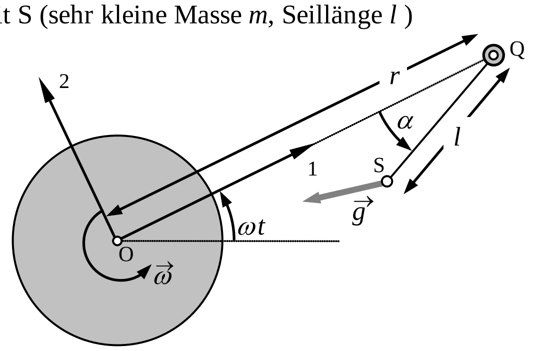
b.) um welchen Faktor die Scheibe A schneller als die Scheibe B drehen muss, wenn sie die gleiche Rotationsenergie speichern soll?

OTH Regensburg, Prüfung B-DYN (PA/BE), WS 2018-19, 8. Feb 2019, 13:30

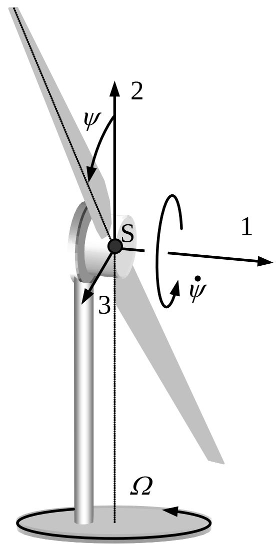
Prof.Dr.Schlingloff, Arbeitszeit 120 Minuten, 4 Aufgaben

Name/Semester: Punkte: Note:

Aufgabe 1: Wenn eine Raumstation (Punkt Q) auf einer Kreisbahn (Radius r) um den Erdmittelpunkt O kreist, so erhält man ihre Umlaufsgeschwindigkeit ω durch: Zentralbeschleunigung = Gravitationsbeschleunigung, also: $\omega^2 r \;=\; \gamma / r^2$
Nun hängt an der Station Q ein in Richtung Erde abgeseilter Subsatellit S (sehr kleine Masse m, Seillänge l) welcher in der Bahnebene Schwingungen ausführt (Winkel α).
Ermitteln Sie für das skizzierte mitbewegte Koordinatensystem:



a.) die Vektoren für Ort $\vec{r}_{\mathrm{OQ}}$, Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$, und Beschleunigung $\vec{a}_{\mathrm{Q}}$ des Punktes Q (der Raumstation),
b.) relativ zum Punkt Q: Ort $\vec{r}_{\mathrm{QS}}$, Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{S,relativ}}$ und Drall $\vec{L}_{\mathrm{Q}}$ des Punktes S (des Subsatelliten),
c.) den Schwerpunkts-Trägheitsterm $\vec{r}_{\mathrm{QS}} \times m\,\vec{a}_{\mathrm{Q}}$,
d.) den Vektor $\vec{r}_{\mathrm{SO}}$, der vom Subsatelliten S zum Erdmittelpunkt O zeigt, sowie den Betrag des Abstands $d = |\,\vec{r}_{\mathrm{SO}}\,|$,
e.) die auf den Subsatelliten S wirkende Erd-Gravitationskraft $\vec{g}$, sowie das Moment $\vec{M}_{\mathrm{Q}}$ dieser Kraft im Punkt Q,
f.) über den Drallsatz für den beschleunigt bewegten Punkt Q die Bewegungsgleichung der Winkelschwingung $\alpha(t)$,
g.) die Frequenz ν für kleine Winkel, d.h.: $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, $d \approx r - l$, $\gamma/d^3 = \gamma/r^3 \cdot (1 - l/r)^{-3} \approx \omega^2\,(1 + 3 \cdot l/r)$.



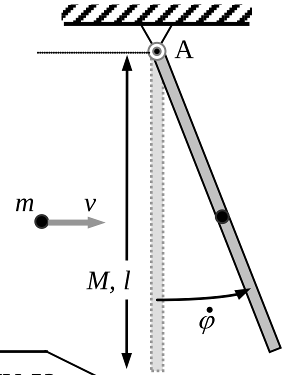
Aufgabe 2: Um die Momente zu berechnen, welche ein schnell rotierender zweiflügliger Ventilator beim Schwenken um die Vertikale auf seine Lagerung ausübt, wird ein mitgeschwenktes Koordinatensystem mit vertikaler 2-Achse verwendet, dessen 1-Achse immer horizontal in Richtung der relativen Drehgeschwindigkeit ($\dot{\psi}$ konstant) der Flügel zeigt. Der Trägheitstensor der Flügel des Ventilators ist in diesem Koordinatensystem zeitlich jedoch <u>nicht konstant</u>, sondern hängt von der aktuellen Lage ψ $(= \dot{\psi}\,t)$ der Flügel ab:

$$J_{\mathrm{S}} \;=\; \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B\cos^2\psi + C\sin^2\psi & (B-C)\sin\psi\cos\psi \\ 0 & (B-C)\sin\psi\cos\psi & C\cos^2\psi + B\sin^2\psi \end{bmatrix}$$

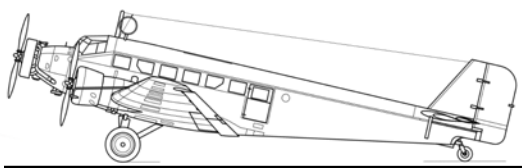
Dabei sind A, B und C die Drehträgheiten um die Koordinatenachsen für $\psi = 0$. Nun wird der Ventilator mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die 2-Achse gedreht.

a.) Geben Sie Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_{\mathrm{Koordinatensystem}}$ und $\vec{\omega}_{\mathrm{Ventilator}}$ in Vektorform an.
b.) Berechnen Sie den (schwerpunktsbezogenen) Drallvektor $\vec{L}_{\mathrm{S}}$ des Ventilators.
c.) Berechnen Sie das durch die Kreiseleffekte verursachte Lager-Moment $\vec{M}_{\mathrm{S}}$.

Aufgabe 3: Ein homogenes Brett (Masse M, Länge l), welches drehbar gelagert an der Decke hängt, wird mittig (im Abstand $l/2$ vom Aufhängepunkt A) von einer Pistolenkugel (Punktmasse m) getroffen. Vor dem Einschlag war das Brett in Ruhe und die Kugel hatte die Horizontalgeschwindigkeit v, nach dem Einschlag steckt die Kugel im Brett, welches nun wie skizziert mit der Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ nach rechts ausschlägt. Berechnen Sie:



a.) den Drall L_{A} der Kugel relativ zum Aufhängepunkt A vor dem Einschlag,
b.) das Trägheitsmoment J_{A} von Kugel und Brett zusammen nach dem Einschlag,
c.) die Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ unmittelbar nach dem Einschlag,
d.) für $M = 100\,m$ den prozentualen Energieverlust $\Delta E / E$ beim Einschlagen.



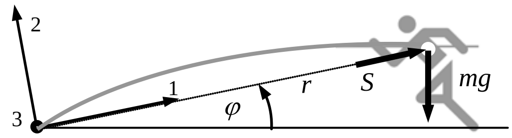
Aufgabe 4: Für das historische Flugzeug JU-52 wird als beste Steigrate 4 m/s bei einem Startgewicht von 111 kN angegeben, wenn alle drei Motoren (je 500 kW Wellenleistung, Vortriebswirkungsgrad 80%) laufen. Auf welchen Wert verringert sich die Steigrate, wenn einer der Motoren ausfällt?

OTH Regensburg, Prüfung B-DYN (TM3), SS 2019, 23. Juli 2019, 8:30

Prof.Dr.Schlingloff, Arbeitszeit 120 Minuten, 4 Aufgaben

Name/Semester: Punkte: Note:

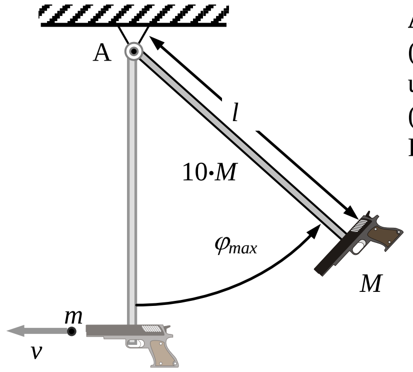
Aufgabe 1: Polarkoordinaten r und φ werden zur Berechnung der Flugbahn des Schwerpunktes eines Stabhochspringers verwendet (die 1-Achse des mitbewegten Koordinatensystems zeigt immer vom Aufstützpunkt des Stabes zum Springer, während die 3-Achse immer horizontal bleibt). Auf den Springer (Punktmasse m) wirken nur die Gewichtskraft $G = m$g (vertikal nach unten) sowie die konstante Stabkraft S (in 1-Richtung).



a.) Geben Sie den Ortsbeschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}$ (in Abhängigkeit von den Größen r, φ und deren zeitlichen Ableitungen) an.

b.) Geben Sie die Vektoren der einwirkenden Kräfte $\vec{S}$ und $\vec{G}$ an und stellen Sie die Bewegungsgleichung der Flugbahn auf.

c.) Welche Energiemenge E ist in Stab gespeichert, wenn dieser auf die Hälfte seiner Gesamtlänge r_0 zusammengebogen worden ist.

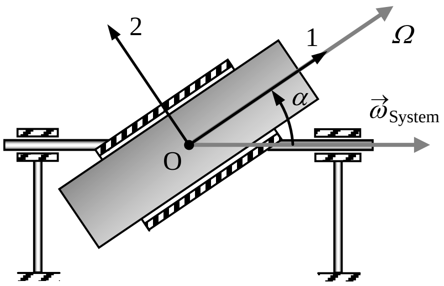


Aufgabe 2: Um die Mündungsgeschwindigkeit einer Pistolenkugel zu messen ("Frieden schaffen durch Handfeuerwaffen") wird eine Pistole (Punktmasse M) unten an einem frei drehbar an der Decke (Lager A) hängenden homogenen Brett (Länge l, Masse $10 \cdot M$) befestigt und ferngesteuert abgefeuert. Durch den Rückschlag schlägt das Brett wie skizziert nach rechts aus. Berechnen Sie:

a.) aus dem gemessenen Ausschlagwinkel φ_{max} mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes die Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Brettes unmittelbar nach dem Schuß; sowie

b.) aus dieser Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ mit Hilfe des Drallerhaltungssatzes für den Aufhängepunkt A die Geschwindigkeit v der Pistolenkugel m.

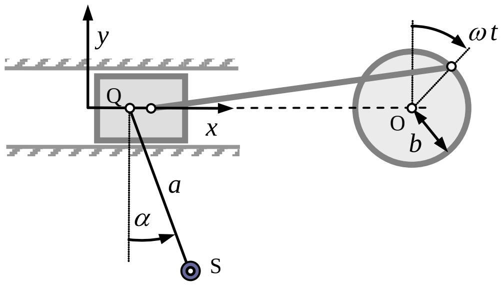
Aufgabe 3: Ein stabförmiger Rotor (Drehträgheit um die Stabachse A, um dazu senkrechte schwerpunktsbezogene Achsen B) wird so gelagert, dass er selbst um seine Achse rotieren kann, während gleichzeitig die Lagerung um eine horizontale Achse rotiert. Dabei schließt die Stabachse (die 1-Achse, siehe Skizze) mit der horizontalen Drehachse der Lagerung den Winkel α ein. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}_{\text{System}}$ der Lagerung ist im "lagerfesten" Koordinatensystem konstant und lautet: $\vec{\omega}_{\text{System}} = (\ \omega\cos\alpha\ ,\ -\omega\sin\alpha\ ,\ 0\ )$



a.) Berechnen Sie das Lagermoment $\vec{M}_{\text{O}}$ im Koordinatenursprung (= Rotorschwerpunkt) durch die Massenwirkung des Rotors, wenn dieser sich <u>nicht</u> relativ zu seiner Lagerung dreht ($\Omega = 0$).

b.) Berechnen Sie welchen Wert die Relativdrehgeschwindigkeit Ω annehmen muß damit dieses Kreiselmoment verschwindet ($\vec{M}_{\text{O}} = 0$).

Aufgabe 4: Eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Scheibe (Mittelpunkt O, Radius b) versetzt über eine lange Pleuelstange einen Kolben (Punkt Q) in eine etwa harmonische horizontale Bewegung: $x(t) = b \cdot \sin\omega t$
An diesem Kolben hängt ein Fadenpendel (Punkt S, Masse m, Fadenlänge a), das Schwingungen ausführt (Winkel α) . Berechnen Sie für den Bezugspunkt Q des skizzierten Koordinatensystems:



a.) den relativen Ortsvektor $\vec{r}_{\text{QS}}$ der Punktmasse m,

b.) ihren relativen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{\text{S}}$,

c.) ihren Relativdrall $\vec{L}_{\text{Q}}$ und seine Ableitung $\dot{\vec{L}}_{\text{Q}}$,

d.) den Schwerpunkts-Trägheitsterm $\vec{r}_{\text{QS}} \times m\,\vec{a}_{\text{Q}}$,

e.) das Moment $\vec{M}_{\text{Q}}$ der Gewichtskraft mg.

f.) Stellen Sie die Schwingungsgleichung auf und

g.) geben Sie an, für welchen Wert von ω sich der Effekt der "Resonanz" einstellt.

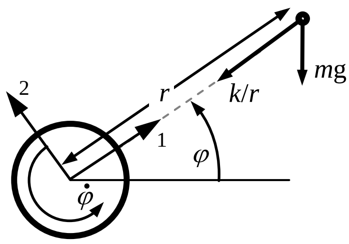
OTH-Regensburg, Prüfung DYN (PA), WS 2019-20, 6. Feb 2020, 11:00

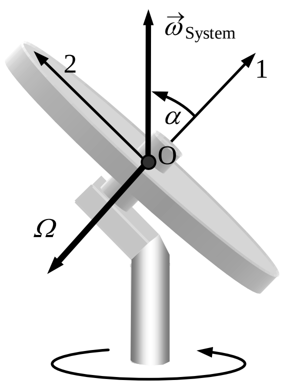
Prof.Dr.Schlingloff, 120 Min, Alle zugelassenen Hilfsmittel

Name/Semester: Punkte:

Aufgabe 1: Polarkoordinaten r und φ werden zur Berechnung der Flugbahn eines Eisenspans (Punktmasse m) in der Nähe eines starken Magneten verwendet (welcher den Span mit der Kraft $F = k/r$ anzieht). Die Bewegung erfolgt in der vertikalen 1-2 Ebene eines mit-bewegten Koordinatensystems, wobei die 1-Achse immer vom Magneten zum Span zeigt. Ermitteln Sie für die Bahn des Eisenspans in Abhängigkeit von den Größen r, φ (und deren zeitlichen Ableitungen):

a.) den Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ des Koordinatensystems;
b.) den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Spans;
c.) seinen Ortsbeschleunigungsvektor $\vec{a}$;
d.) den Vektor $\vec{F}$ der auf den Span wirkenden Magnetkraft;
e.) den Vektor $\vec{G}$ der auf den Span wirkenden Gewichtskraft;
f.) mittels des Impulssatzes die Bewegungsgleichungen der Flugbahn des Eisenspans.



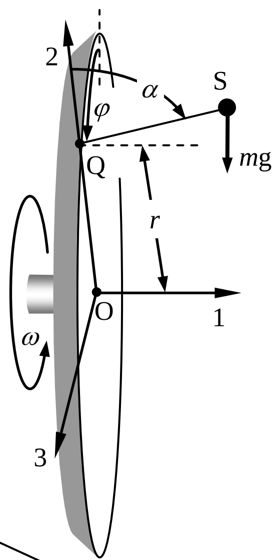


Aufgabe 2: Eine dünne Kreisscheibe (Trägheit A um die Drehachse und $B = A/2$ um dazu senkrechte Achsen) ist so auf einer Drehhalterung gelagert, dass ihre Achse um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt ist. Aufgabe ist es nun die durch einen Radnabenmotor gesteuerte Relativdrehgeschwindigkeit Ω um die Scheibenachse (in negativer 1-Richtung) so einzustellen, dass bei einer Drehung der Halterung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}_{\text{System}}| = \omega$ um die Vertikale das Lagermoment im Koordinatenursprungs-Punkt O verschwindet. (Die 3-Achse des skizzierten Koordinatensystem bleibt immer horizontal.)

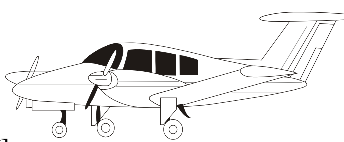
a.) Ermitteln Sie die Vektordarstellung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{\text{System}}$,
b.) den Drallvektor $\vec{L}_{\text{O}}$ und das Lagermoment $\vec{M}_{\text{O}}$ der Scheibe sowie
c.) den Wert Ω für welchen das Lagermoment $\vec{M}_{\text{O}}$ gerade zu Null wird.

Aufgabe 3: An einer Kreisscheibe, welche mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die horizontale 1-Achse rotiert, ist im Punkt Q (mit dem Abstand r vom Mittelpunkt O) ein Drahtpendel der Länge l so befestigt, dass die Punktmasse m (im Punkt S) in der 1-2 Ebene des mitgedrehten Koordinatensystems Schwingungen ausführen kann (Winkel α). Die Lage der 2-Achse gegenüber der Vertikalen wird durch den Winkel $\varphi = \omega\, t$ beschrieben. Ermitteln Sie für das mitgedrehte Koordinatensystem:

a.) die relativen Vektoren für Ort $\vec{r}_{\text{QS}}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{S}}$ der Punktmasse m,
b.) den Drall $\vec{L}_{\text{Q}}$ der Punktmasse m relativ zum Punkt Q und seine Ableitung $\dot{\vec{L}}_{\text{Q}}$,
c.) für den Punkt Q: Ort $\vec{r}_{\text{OQ}}$, Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{Q}}$ und Beschleunigung $\vec{a}_{\text{Q}}$,
d.) den Schwerpunkts-Trägheitsterm $\vec{r}_{\text{QS}} \times m\, \vec{a}_{\text{Q}}$,
e.) die Gewichtskraft $\vec{G}$ der Masse m und ihr Moment $\vec{M}_{\text{Q}} = \vec{r}_{\text{QS}} \times \vec{G}$ im Punkt Q.
f.) Geben Sie die Differentialgleichung dieser parametererregten Schwingung an.



Aufgabe 4: Für das zweimotorige Flugzeug Beech Duchess wird wird als beste Steigrate 6 m/s bei einem Startgewicht von 18.5 kN angegeben, wenn beide Motoren laufen (je 125 kW Wellenleistung, Vortriebswirkungsgrad 80%).



a.) Berechnen Sie die dafür erforderliche Steigleistung [in kW].
b.) Auf welchen Wert [in m/s] verringert sich diese Steigrate, wenn einer der beiden Motoren ausfällt?
c.) Und welche Sinkrate [in m/s] wird sich einstellen, wenn wegen Spritmangels beide Motoren ausfallen?