Statik

Arbeitsmaterialien zur Vorlesung und Übung
Prof Dr.-Ing.H.Schlingloff

1.Stereostatik

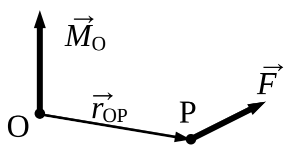
1.1 Kraft und Moment

Wenn eine physikalische Größe außer einem skalaren Wert auch noch eine räumliche Richtung besitzt (wie zum Beispiel eine Kraft oder eine Geschwindigkeit), so lässt sie sich normalerweise mathematisch durch einen Vektor beschreiben. Dafür ist aber eine wesentliche Voraussetzung, dass für diese physikalische Größe die Regeln der Vektorrechnung gelten, d.h. dass sich diese gerichtete Größe nach den Regeln der Vektorrechnung in zwei Größen zerlegen lässt, und dass sich zwei dieser gerichteten Größen wiederum zu einer Größe zusammensetzen lassen. Die "Addition von Vektoren" ist dabei als Hintereinanderhängen definiert (wobei es bei mehreren Vektoren auf die Reihenfolge nicht ankommen darf); die Multiplikation von Vektoren mit skalaren Größen ist als "Längenskalierung" definiert (die Subtraktion zweier Vektoren ist also nichts weiter als die Addition, wobei vorher die Richtung des zweiten Vektors durch Multiplizieren mit –1 umgedreht worden ist).

Bildlich werden Vektoren durch Pfeile dargestellt; und Vektorgleichungen sind nichts anderes als "zu einem geschlossenen Polygonzug hintereinandergehängte Vektoren" (die bildliche Darstellung eines Vektors kann man beliebig parallel verschieben, es ist dabei aber immer derselbe Vektor, nur anders dargestellt...). Solche Vektorgleichungen gelten natürlich unabhängig von Koordinatensystemen. Die Tatsache, dass man Vektoren in Komponenten zerlegen darf, macht die Darstellung eines Vektors (oder einer Vektorgleichung) in sog. Komponentenform mit Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem möglich. In der Technischen Mechanik werden dazu fast immer Kartesische Koordinatensysteme verwendet (drei Achsen gleichskaliert und senkrecht aufeinander, wobei die "Rechte-Hand Regel" gilt).

Eine Kraft (Dimension N (Newton), 1N=1 kg m/s²) wird durch einen Kraftvektor $\vec{F}$ (Größe, Richtung) und einen Ortsvektor $\vec{r}_{OP}$ (vom Bezugspunkt O zum Angriffspunkt P) beschrieben. Das Moment $\vec{M}_O$ dieser Kraft ist definiert als Kreuzprodukt aus Ortsvektor und Kraftvektor.

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}$$



Für Kraftsysteme (bestehend aus mehreren Kräften) ist das Gesamtmoment in einem Punkt einfach die Summe aller Einzelmomente. Kraftsysteme sind einander dann äquivalent (statisch gleichwertig), wenn sie für jeden beliebigen Bezugspunkt dasselbe Moment ergeben. Sogenannte Invarianzoperationen ändern das Moment eines Kraftsystems nicht:

- Verschieben von Kräften in Richtung ihrer Wirkungslinie;
- Zusammensetzen/Zerlegen von Kräften mit gleichem Angriffspunkt;
- Hinzufügen/Fortlassen von Nullvektoren;

Jedes beliebige Kraftsystem kann in einem Punkt O soweit reduziert werden (d.h. äquivalent vereinfacht werden), dass nur noch ein Kraftvektor und ein Momentenvektor übrigbleibt ("Kraftwinder"). Ein Moment kann man sich dabei als Vektorpaar vorstellen (zwei Kräfte, gleichgroß, parallel aber entgegengesetzt gerichtet, nicht auf derselben Wirkungslinie).

Für den Wechsel des Bezugspunktes von O nach Q gilt: $\vec{M}_Q = \vec{M}_O + \vec{r}_{QO} \times \vec{F}$

1.2 Arbeitsprinzipien der Statik

Problemstellungen der Stereostatik werden i.A. nicht durch das Finden von geeigneten Gesetzmäßigkeiten aus der Formelsammlung gelöst (wie sonst in der Physik), sondern durch das Anwenden von sog. Arbeitsprinzipien und das Ansetzen von Gleichgewichtsbedingungen:

- Das Gleichgewichtsaxiom: Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn er in Ruhe ist und das an ihm angreifende Kräftesystem einer Nullkraft äquivalent ist.

- Das Schnittprinzip: Befindet sich ein mechanisches System im Gleichgewicht, dann ist auch jedes herausgeschnitten gedachte Teilsystem im Gleichgewicht, wobei alle auf das Teilsystem einwirkenden Kräfte einschließlich der Schnittkräfte berücksichtigt werden müssen.

- Das Erstarrungsprinzip: Das Gleichgewicht bleibt bestehen, wenn bei einem elastischen System Teile erstarren.

- Das Gegenwirkungsprinzip: Wenn Körper (oder Körperteile) Kräfte aufeinander ausüben, dann sind Kraft und Gegenkraft entgegengesetzt gerichtet und dem Betrage nach gleich groß.

- Das Prinzip der virtuellen Arbeit: Kräfte, in ihrer Wirkungslinie verschoben, leisten Arbeit. Wenn die Auswirkung virtueller Verschiebungen leicht zu erkennen ist, können Kräfte, die virtuelle Arbeit leisten, ohne großen Aufwand berechnet werden. Die Summe aller virtuellen Arbeiten am System muss verschwinden: $\Sigma\ \delta W = \Sigma\ F\delta x = 0$. (Vorteil: Nur Kraftkomponenten, die virtuelle Arbeit leisten, gehen in die Betrachtung ein.)

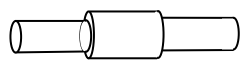
Die Gleichgewichtsbedingungen (Summe aller äußeren Kräfte und Momente für jeden beliebigen Bezugspunkt gleich Null) ergeben im räumlichen Fall 6 skalare Gleichungen, im Falle eines ebenen Kräftesystems 3 skalare Gleichungen.

1.3 Lager und Lagerreaktionen

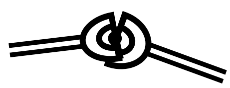
Als Lager bezeichnet man allgemein Verbindungselemente (Stützen, Aufhängungen, Einspannungen usw.); sie sollen die gewünschte Orientierung des Körpers im Raum gewährleisten und Kräfte übertragen.
Eine Lagerung heißt kinematisch bestimmt, wenn sie die Lage des Körpers eindeutig festlegt, sonst kinematisch unbestimmt.
Eine Lagerung heißt statisch bestimmt, wenn die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingunen berechnet werden können, sonst statisch unbestimmt.
(Statisch unbestimmte Systeme können allein mit den Arbeitsprinzipien der Stereostatik nicht berechnet werden, wohl aber mit den Arbeitsprinzipien der Elastostatik.)

Lager haben sog. Wertigkeiten (Anzahl der übertragbaren Kraft und Momentenkomponenten):

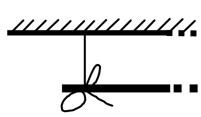
z.B.: Scharniergelenk (2 bzw. 3 Kraftkomponenten
+ 2 Momentenkomponenten = 4- (bzw. 5-) wertig)



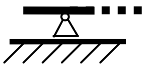
z.B.: Kardangelenk (3 Kraftkomponenten
+ 1 Momentenkomponente = 4-wertig)



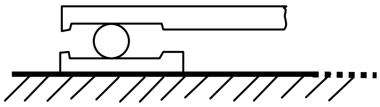
Bindfaden-Aufhängung (1 Kraftkomponente
+ 0 Momentenkomponenten = 1-wertig)

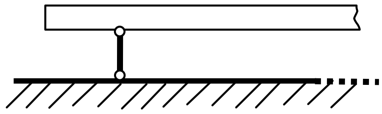


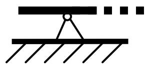
Bei ebenen Kräftesystemem gibt es drei genau verschiedene Lagerungsmöglichkeiten:

1-wertig: das verschiebbare Gelenklager: 

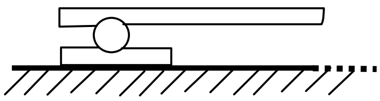
Ausführungs-
beispiele:

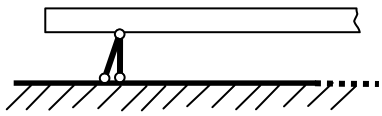


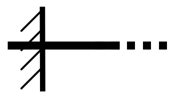


2-wertig: das feste Gelenklager: 

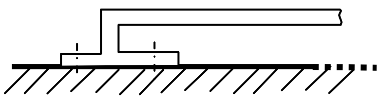
Ausführungs-
beispiele:

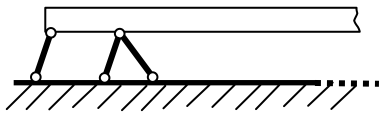




3-wertig: feste Einspannung: 

Ausführungs-
beispiele:





1.4 Gewichtskraft und Schwerpunkt

Gewicht ist eine in Richtung der Fallbeschleunigung wirkende Kraft $G = mg$.
Der sogenannte Schwerpunkt (eigentlich besser Massenmittelpunkt) eines Körpers wird im parallelen Gravitations-Kraftfeld über das Momenten-Gleichgewicht berechnet:

für diskrete Teilmassen: bei kontinuierlicher Massenverteilung:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M_{\text{gesamt}}} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot M_i \qquad\qquad \vec{r}_S = \frac{1}{M_{\text{gesamt}}} \int_M \vec{r}\, dM$$

Dabei ist $\vec{r}_S$ der Vektor vom Koordinaten-Ursprung zum Schwerpunkt, $\vec{r}_i$ der Vektor zum Schwerpunkt des Massenelementes M_i (bzw. $\vec{r}$ zu dM). Die Formel kann sinngemäß modifiziert werden: Analog für homogene Körper statt Masse M auch Volumen V, für flächenhafte Körper statt Masse M auch Fläche A, für linienhafte Körper (z.B. Draht) statt Masse M auch Länge L.

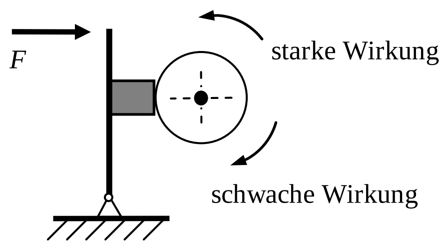
Bei homogenen Körpern mit Symmetrie-Ebenen muss der Schwerpunkt auf jeder Symmetrie-ebene liegen. Bei zwei Teilkörpern muss der Gesamt-Schwerpunkt auf der Verbindungslinie der Teil-Schwerpunkte liegen.

Die Guldinschen Regeln ($O = 2\pi\, r_S\, L$ bzw $V = 2\pi\, r_S\, A$) dienen zur Berechnung der erzeugten Oberfläche O einer rotierenden Linie L bzw. des erzeugten Volumens V einer rotierenden Fläche A , wenn der jeweilige Schwerpunktsabstand r_S von der Rotationsachse bekannt ist.

1.5 Reibung

Es gibt Haftreibung ($F_R \leq \mu_o F_N$) und Gleitreibung ($F_R = \mu F_N$), dabei ist F_N die vom Körper auf die Unterlage ausgeübte Normalkraft. Der Gleitreibungsbeiwert μ ist i.A. etwas geringer als der Haftreibungsbeiwert μ_o (z.B. Reibschwinger, Geige, quietschende Bremse).

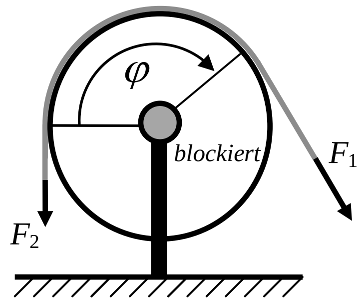
Die Reibungskraft muss in den Gleichgewichtsbedingungen mit berücksichtigt werden, z.B. hängt bei der Trommelbremse die Reibwirkung von der Drehrichtung ab. In das Freikörperbild für das freigeschnittene Bauteil müssen sowohl Normalkraft F_N wie auch Reibkraft F_R eingetragen werden (dabei gilt $F_R = \mu F_N$); dann erst können die Gleichgewichtsbedingungen angesetzt werden. (Falsch wäre es, erst F_N mit den Gleichgewichtsbedingungen ohne F_R zu berechnen und dann F_R mit $F_R = \mu F_N$ nachträglich dazuzumogeln.)



Die Tatsache, dass die Reibkraft mit in die Gleichgewichtsbedingungen eingeht, bedingt viele Anwendungen, z.B. die Selbsthemmung einer Schraube oder die Reibkraftverstärkung eines Keilriemens.

Durch die Seilreibung ergibt sich ein Verstärkungsfaktor bzw. ein Abschwächungsfaktor, je nachdem ob die Kraft F_1 die Kraft F_2 nun langsam hochziehen oder runterlassen soll.

$F_1 / F_2 = e^{\pm \mu \varphi}$ (plus/minus je nach Richtung)



1.6 Stabwerke

Fachwerke sind eine idealisierte Sonderform der allgemeineren Stabwerke, wenn die Stäbe

- gerade, starr und gewichtslos sind (das Stabgewicht kann auf die Knoten verteilt werden);
- in den sogenannten Knoten gelenkig und zentrisch gelagert sind und;
- ausschließlich in den Knoten belastet werden (d.h. nur zug- bzw. druckbelastet sind).

Stabwerke können statisch und/oder kinematisch unbestimmt sein; eine für statische und kinematische Bestimmtheit von Fachwerken existierende Abzählregel (Stäbe = 2 Knoten -3 für ein ebenes Fachwerk; Stäbe = 3 Knoten - 6 für ein räumliches Fachwerk) kann jedoch nur mit Vorsicht verwendet werden, da sie mögliche Sonderfälle nicht berücksichtigt. Ein statisch bestimmtes ebenes Fachwerk kann durch sukzessives Entfernen von Dreiecken (jeweils zwei durch einen Knoten verbundene Stäbe) „abgebaut“ werden, ein räumliches Fachwerk durch das Entfernen von Dreieckspyramiden (jeweils drei durch einen Knoten verbundene Stäbe).

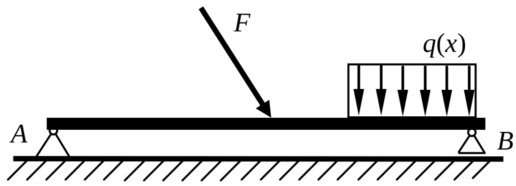
Zur Bestimmung der Stabkräfte gibt es:

- das Knotenpunktverfahren (Knoten herausschneiden und in vertikaler und horizontaler Richtung die Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen ansetzen. Angefangen von einem einfachen Knoten kann so das gesamte Fachwerk „abgebaut“ werden);

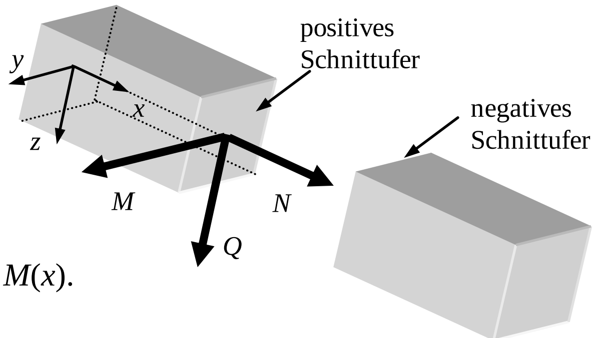
- das „Rittersche“ Schnittverfahren (gezielt einzelne Stäbe schneiden und in geeigneten Knoten die Momenten-Gleichgewichtsbedingung ansetzen); und

- den Cremonaplan. (grafisches Verfahren basierend auf dem Knotenpunktverfahren, heute mit geringer praktischer Bedeutung).

1.7 Innere Kräfte und Momente



Bei einem durch ein ebenes Kräftesystem belasteten Balken bestehen die inneren Kräfte, (Schittkräfte) aus Normalkraft, Querkraft und Moment (im räumlichen Fall kommen eine Kraft- und zwei Momentenkomponenten dazu).



Schittkräfte sind dann positiv, wenn sie am positiven Schnittufer (wo der Normalenvektor in positive Koordinatenrichtung zeigt) positiv sind (willkürliche Vorzeichenfestlegung).

Bestimmt werden i.A. die Normalkraftfläche $N(x)$, die Querkraftfläche $Q(x)$ und die Momentenfläche $M(x)$.

Dabei gilt: $dQ(x) / dx = - q(x)$; $dM(x) / dx = Q(x)$

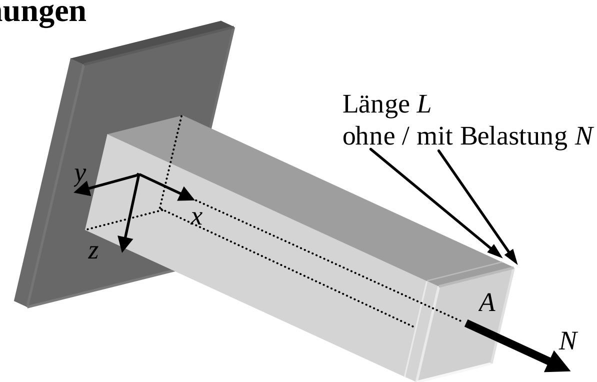
An Stellen, wo punktförmige Kräfte (bzw. Momente) eingeleitet werden, ändern sich die Schnittreaktionsflächen unstetig (d.h. sie machen Sprünge). An diesen Stellen ändern sich die Ableitungen der Kurven stetig durch einen Knick.

Die Normalkraft N erzeugt im Balken (gleichmäßig über die Schnittfläche A verteilte) Normalspannungen $\sigma = N / A$, die Querkraft Q erzeugt (ungleich über die Schnittfläche verteilte) Schubspannungen τ und das Biegemoment M erzeugt (im Schnittflächen-schwerpunkt Null und sonst linear von der Koordinate z abhängige) Normalspannungen.

Bei nicht zu hohen Spannungen ist nach dem Hookeschen Gesetz die Verformung proportional zur Spannung, z.B. ist die Dehnung ε eines Stabes (die auf die Länge bezogene Längenänderung $\varepsilon = \Delta L/L$) proportional zur Stab-Normalkraft und die Krümmung w'' eines Balkens (die zweite Ableitung der Biegelinie w) proportional zum Biegemoment.

2. Elasto-Statik

2.1 Zug/Druck Stäbe, Normalspannungen, Dehnungen



Die Normalspannung $\sigma(x)$ (Dimension N/mm²) im Längs-Balken ist die Schnittkraft $N(x)$ (in Balkenlängsrichtung x) bezogen auf die Balken-Querschnittsfläche $A(x)$, also

$$\sigma(x) = N(x) / A(x)$$

(Zugspannung positiv, Druckspannung negativ).
Dabei wird vorausgesetzt, dass sich N und A höchstens langsam als Funktion von x ändern (nicht sprungartig). Nach dem Hookeschen Gesetz ist die dimensionslose Verformung ε (Dehnung bzw. Stauchung) proportional zur Normalspannung mit dem Elastizitätsmodul E (Emodul,N/mm²) als Proportionalitätskonstante. Zusätzlich dehnt sich der Balken bei Änderung der Umgebungstemperatur um $\alpha\,\Delta T$ aus:

$\varepsilon(x)= \sigma(x) / E$ (durch Normalspannungen); $\varepsilon(x)= \alpha\,\Delta T(x)$ (durch Temperaturänderung)

Man kann sich die Dehnung ε als die auf die Länge bezogene Längenänderung eines Balkenelements vorstellen. Die Verschiebung ΔL (oder Längenänderung) eines Balkenelements an der Stelle $x = L$ ergibt sich dann als

$$\Delta L(L) = \int_0^L \varepsilon(x)\,dx = \int_0^L \left(\frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha\,\Delta T(x) \right) dx$$

Bei einem einfachen Zug/Druck-Stab (keine x-Abhängigkeit von N, A und ΔT) vereinfacht sich diese Formel zu

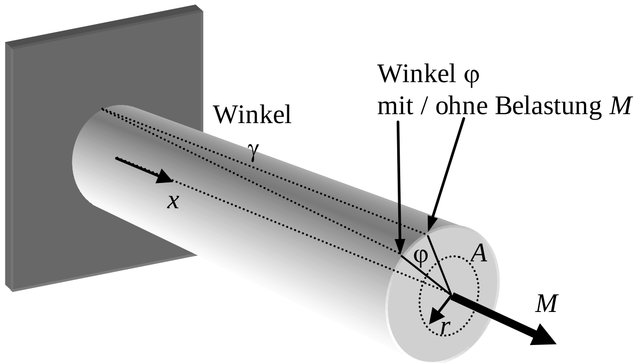
$$\Delta L = \frac{N\,L}{EA} + \alpha\,\Delta T\;L \quad ; \quad \text{bzw. zu} \quad \Delta L = \frac{N\,L}{EA} \quad \text{(ohne Temperaturänderung)}$$

Übungsaufgaben zu diesen Formeln lassen sich zu zwei Aufgabenklassen zuordnen:

1.) Statisch bestimmte Aufgaben, bei denen entweder die Spannung $\sigma(x)$ oder die Querschnittsfläche $A(x)$ (oder beides, oder auch die Temperaturerhöhung $\Delta T(x)$) nach bestimmten Vorgaben von x abhängig gemacht worden ist, und bei der die Lösung der Aufgabe durch Integration der Dehnung $\varepsilon(x)$ gefunden werden kann; und

2.) Statisch unbestimmte Aufgaben, bei denen zur Lösung die Bauteil-Verformungen mit berücksichtigt werden müssen. Die Gleichgewichtsbedingungen gelten hierbei unverändert, reichen jedoch für die Lösung der Aufgabe nicht aus. Die „fehlenden“ Gleichungen erhält man aus den Verformungsbedingungen (hierbei meistens einfache Zug/Druckstäbe, mit Längenänderung als Funktion der Normalkraft) kombiniert mit den Kompatibilitäts-(Verträglichkeits-) Bedingungen (die Längenänderungen der Stäbe sind nicht komplett unabhängig voneinander).

2.2 Torsions-Stäbe, Schubspannungen



Wird ein Stab mit Kreisquerschnitt (oder ein Rohr) durch ein Torsionsmoment $M(x)$ in Längsrichtung belastet, so treten im Stabquerschnitt Schubspannungen $\tau(x,r)$ auf. Ihre Größe ist eine lineare Funktion vom Abstand r zur Kreisquerschnittsmitte.
Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$M(x) = \int_A r\,\tau(x,r)\,dA = \frac{\tau(x,r)}{r}\int_A r^2\,dA$$

Der Ausdruck $\int_A r^2\,dA$ hängt von der (voll oder hohlkreisförmigen) Querschnittsfläche $A(x)$ ab und wird als polares Flächenträgheitsmoment I_P bezeichnet. Für die Schubspannungen in einem durch ein Torsionsmoment M belasteten Rohr folgt dann:

$$\tau(x,r) = \frac{M(x)}{I_P\,(x)}\cdot r \quad , \text{mit} \quad I_P\,(x) = \frac{\pi}{2}\left(R^4_{\text{aussen}} - R^4_{\text{innen}}\right)$$

für dünnwandige Rohre:
$$I_P = 2\pi\,t\,r^3$$

Dabei sind R_{aussen} und R_{innen} die Maße der Kreisquerschnittsfläche. Zur Berechnung des Verdrehungswinkels φ an der Stelle $x = L$ wird in Analogie zur Dehnung bei Zug/Druck bei Schub ein Verschiebungswinkel γ definiert, der bei linear-elastischer Beanspruchung (Hookesches Gesetz) proportional zur Schubspannung τ ist, wobei die Proportionalitätskonstante Schubmodul G genannt wird:

$$\gamma(x,r) = \tau(x,r)\,/\,G$$

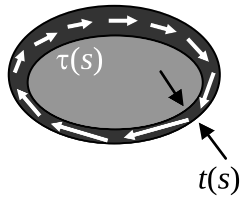
Aus geometrischen Überlegungen folgt $\gamma(x,r) = r\,d\varphi\,/dx. = r\,\varphi'(x)$. Damit lässt sich schreiben:

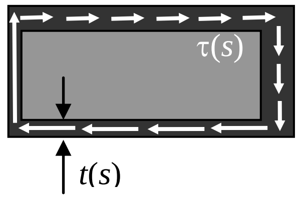
$$\varphi(L) = \int_0^L \varphi'(x)\,dx = \int_0^L \frac{M(x)}{G\,I_P\,(x)}\,dx \quad ; \text{bzw für einfachen Torsionsstab:} \quad \varphi(L) = \frac{M\,L}{G\,I_P}$$

Die Formel berechnet den Winkel φ natürlich im Bogenmaß. Ebenso wie bei Zug/Druck Beanspruchung im Balken lassen sich bei Torsionsbeanspruchung statisch bestimmte Aufgaben (mit einem sich über die Balkenlänge verändernden Querschnitt oder verändernden Torsionsmoment) und statisch unbestimmte Aufgaben (Berechnung von Gleichgewichts-, Verformungs- und Verträglichkeits-Bedingungen) formulieren.

Komplizierter sind die Verhältnisse, wenn der Torsionsstab keine kreisförmige Querschnittsfläche besitzt. Man ist dann bei der Ableitung der Formeln auf gewisse Annahmen angewiesen, welche den abgeleiteten Formeln eine leider nur sehr eingeschränkte Gültigkeit erteilen. Hier werden dünnwandige, (offene und geschlossene) Querschnitte betrachtet. Die Formeln gestatten die Berechnung der Schubspannungen τ und des Verdrehungswinkels φ als Funktion des Torsionsmomentes M und der Balkengeometrie. Die Übungsaufgaben beschränken sich i.A. darauf, die Anwendung dieser „Handformeln“ zu demonstrieren (also i.A. keine statisch unbestimmten Aufgaben).

Zunächst zum dünnwandigen, geschlossenem Querschnitt:
Die Annahme des „Schubflusses“ sagt aus, dass das Produkt aus Schubspannungen und Wandstärke entlang der „Umlaufkoordinate“ s





konstant ist, also $\tau(s)\ \ t(s)$ = konstant. Die Schubspannungen sind dort höher, wo das Material dünner ist. Man berechnet dann Schubspannungen und Verdrehungswinkel als:

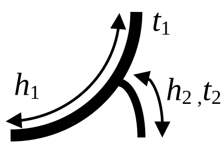
$$\tau(x,s) = \frac{M(x)}{2\,A(x)\,t(s)}$$ (A(x) ist die gesamte umschlossene Fläche, auch das Hellgraue!)

und

$$\varphi(L) = \int_0^L \frac{M(x)}{G\,I_T\,(x)}\,dx \qquad ; \quad \text{mit} \qquad I_T\,(x) = \frac{4\,A^2(x)}{\oint_s \frac{ds}{t(s)}}$$

Da die Koordinate s keinen definierten Anfangs- und Endpunkt hat (sondern nach einem Umlauf dort aufhört, wo sie angefangen hat), muss man bei der Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes I_T das Kreisintegral („integriert über einen ganzen Umlauf“) verwenden.

Schließlich zum dünnwandigen offenen Querschnitt:
Das Profil kann aus n Steifen der Breite h und der Wandstärke t bestehen.



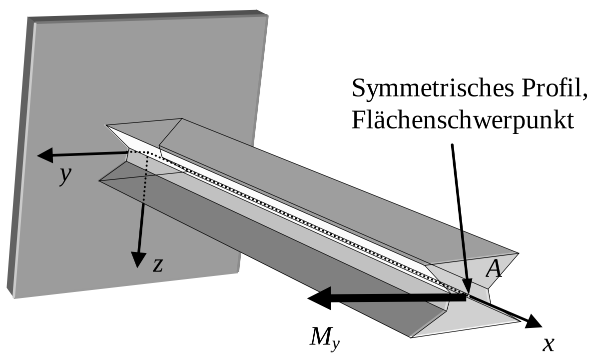
Offene Profile setzen einem Torsionsmoment kaum Widerstand entgegen: die maximalen Schubspannungen sind sehr klein, sie laufen entlang der Oberfläche (in der „Außenhaut“) des Steifens um die jeweiligen Steifen herum. In der Mitte der Steifen dagegen treten keine Schubspannungen auf. Groß sind die Verformungen bei geringer Torsionsbelastung:

$$\varphi\,(L) = \int_0^L \frac{M(x)}{G\,I_T\,(x)}\,dx \qquad ; \quad \text{mit} \qquad I_T\,(x) = \frac{\beta}{3} \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\,t_i^3(x)$$

Dabei ist β ein Korrekturfaktor, z.B (β = 1) für einen geraden Steifen, (β = 0.99) für ein L-Profil, (β = 1.12) für ein U-Profil, (β = 1.12) für ein T-Profil, (β = 1.30) für ein Doppel T-Profil, (β = 1.17) für ein Kreuz-Profil usw.

2.3 Biegestäbe

Wird ein langer Balken mit symmetrischen Profil durch ein Biegemoment $M_y(x)$ (in horizontaler y-Richtung) belastet, so treten in diesem Balken Normalspannungen $\sigma(x,z)$ auf (oben Druck, unten Zug). Die spannungsfreie „neutrale Faser“ geht horizontal durch den Flächenschwerpunkt ($\sigma(x,z) = 0$ für $z = 0$); die Normalspannungen hängen linear von der Koordinate z ab.



Aus dem Momentengleichgewicht für die Normalspannungen in der Schnittfläche A folgt:

$$M_y(x) = \int_A z\,\sigma(x,z)\,dA \;=\; \frac{\sigma(x,z)}{z}\int_A z^2\,dA \quad , \quad \left[\; N(x) = \int_A \sigma(x,z)\,dA \;=\; \frac{\sigma(x,z)}{z}\int_A z\,dA = 0 \;\right]$$

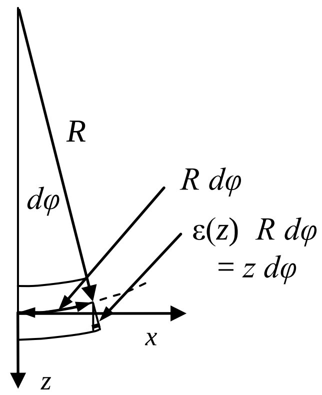
Der Ausdruck $\int_A z^2\,dA$ hängt von der Form der Querschnittsfläche $A(x)$ ab und wird als Flächenträgheitsmoment I_y bezeichnet. Für die Biegespannungen folgt dann:

$$\sigma(x,z) = \frac{M_y(x)\,\cdot\,z}{I_y\,(x)} \quad , \quad \left(\text{z.B } I_{y,\text{Rechteck}} = \frac{b\,h^3}{12}\;;\; I_{y,\text{Kreis}} = \frac{\pi\,r^4}{4}\;;\; I_{y,\text{Hohlrohr}} = \pi\,r^3\,t \right)$$

(mit b Breite, h Höhe, r Radius und t Wandstärke). Die Berechnung der Flächenträgheitsmomente für kompliziertere (zusammengesetzte) Profile des Biegebalkens ist eine Standard-Aufgabe der Technischen Mechanik, dazu folgt weiter unten mehr.

Der Krümmungsradius der Biegelinie $w(x)$ ist $R(x) = z\,/\,\varepsilon(z)$ (wegen $\varepsilon(z)\;\; R\,d\varphi = z\,d\varphi$, siehe nebenstehende Skizze).

Näherungsweise ist die zweite Ableitung der Biegelinie $w(x)$ nach der x-Koordinate etwa umgekehrt proportional zum Krümmungsradius. Man erhält für $w''(x)$ die Beziehung:



$$w''(x) = \frac{-\,M_y(x)}{EI_y\,(x)}$$

Bei einem durch Querkräfte $Q(x)$ (oder längenspezifische Lasten $q(x)$) belasteten Balken wird die Biegelinie üblicherweise unter Vernachlässigung der Verformungen durch Schubspannungen mit der oben stehenden Formel berechnet. Ist dann I_y konstant so gilt:

$$EI_y\,w''(x) = -\,M(x) \quad ; \quad EI_y\,w'''(x) = -\,Q(x) \quad ; \quad EI_y\,w''''(x) = q(x)$$

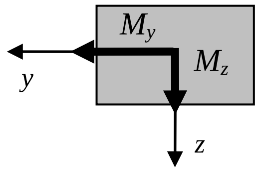
Die Biegelinie kann dann durch mehrfache Integration der entsprechenden Gleichung gefunden werden, wobei die Integrationskonstanten an den individuellen Fall angepasst werden müssen. Für einen fest eingespannten und mit einer Querkraft Q belasteten Balken der Länge L ergibt sich beispielsweise:

$$M(x) = Q\,(\,x - l\,)\;;\;\; w(x) = \frac{Q\,x^2\,(l - x/3)}{2EI_y} \quad ; \quad w(L) = \frac{Q\,l^3}{3EI_y}$$

Übungsaufgaben zu diesem Thema sind oft statisch unbestimmt gelagerte Biegebalken, welche folgendermaßen gelöst werden können: Zuerst ermittelt man den Momentenverlauf als Funktion der noch unbekannten Lagerreaktionen, dann berechnet man die Biegelinie durch Integration des Momentenverlaufs und passt die Integrationskonstanten und die Lagerreaktionen an die jeweiligen Lagerungsbedingungen des Balkens an. Manchmal kann man die Aufgabe auch durch die geeignete Überlagerung von einfachen Standardfällen lösen, deren Ergebnisse man einer Formelsammlung entnehmen kann. (Derartige Aufgaben können allerdings auch durch sog. Energiemethoden der Elastostatik gelöst werden.)

Die schiefe Biegung wird praktisch genauso wie die gerade Biegung behandelt: Das Biegemoment wird in seine beiden Komponenten in Hauptachsenrichtung (mit $\int_A yz\, dA = 0$) zerlegt, anschließend können Biegespannungen und Biegelinie für beide Richtungen separat berechnet werden. Gesamtspannungen und Gesamtverformung ergeben sich dann durch Überlagerung der beiden Fälle. Die Biegespannung für die schiefe Biegung ist dann z.B:

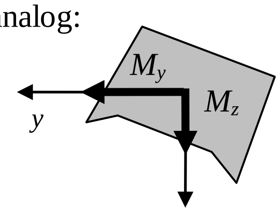
$$\sigma(x,y,z) = \frac{M_y(x) \cdot z}{I_y(x)} - \frac{M_z(x) \cdot y}{I_z(x)}$$



(mit $I_y = \int_A z^2\, dA$, $I_z = \int_A y^2\, dA$ und $I_{yz} = \int_A yz\, dA = 0$).

Ist das Deviationsmoment der Schnittfläche ungleich Null ($I_{yz} \neq 0$), so gilt analog:

$$\sigma(x,y,z) = \frac{M_y(x)\ I_z - M_z(x)\ I_{yz}}{I_y(x)\, I_z(x) - I_{yz}^2} \cdot z - \frac{M_z(x)\ I_y - M_y(x)\ I_{yz}}{I_y(x)\, I_z(x) - I_{yz}^2} \cdot y$$



Die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sowie das Flächendeviationsmoment I_{yz} von komplizierteren (zusammengesetzte) Balkenprofilen können oft durch Addition der Fächenmomente einfacherer Grundflächen (z.B. Rechteck, Kreis usw.) berechnet werden, wenn diese in geeigneter Weise transformiert worden sind (parallelverschoben und/oder gedreht). Für die Parallelverschiebung gibt es den Satz von Huygens-Steiner:

$$I_y^* = I_y + b^2 A \quad , \qquad I_z^* = I_z + a^2 A \quad , \qquad I_{yz}^* = I_{yz} + a\, b\, A$$

Dabei bezeichnet $b^2 A$ die Vergrößerung des Flächenträgheitsmomentes I_y, wenn man den Flächenschwerpunkt der Fläche A um b in z-Richtung verschiebt, und $a^2 A$ die Vergrößerung des Flächenträgheitsmomentes I_z für eine Verschiebung der Fläche A um a in y-Richtung. Deviationsmomente I_{yz} entstehen, wenn eine symmetrische Fläche (z.B. Rechteck, Kreis usw.) in y und in z-Richtung verschoben wird. Für die Verdrehung gilt:

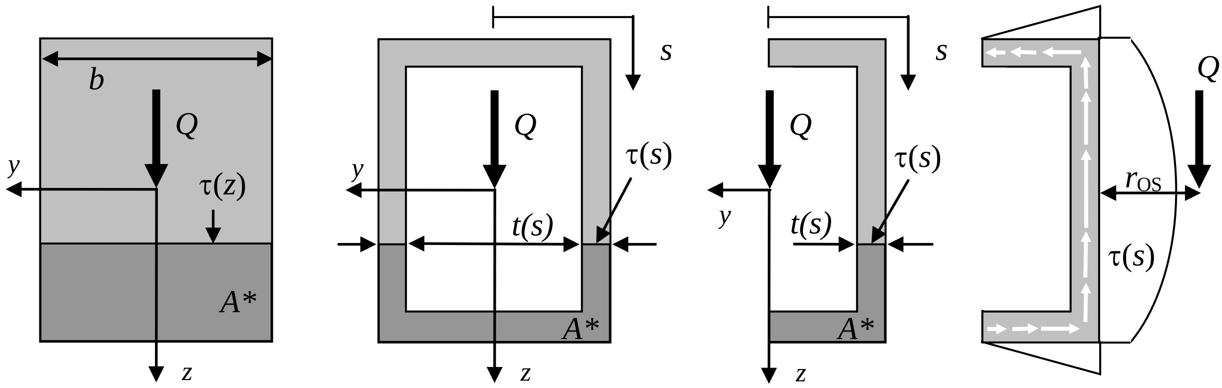
$$I_y^* = \tfrac{1}{2}\,(I_y + I_z) + \tfrac{1}{2}\,(I_y - I_z) \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_z^* = \tfrac{1}{2}\,(I_y + I_z) - \tfrac{1}{2}\,(I_y - I_z) \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{yz}^* = \tfrac{1}{2}\,(I_y - I_z) \sin 2\alpha - I_{yz} \cos 2\alpha$$

Der Stern bezeichnet die neuen Flächenmomente, wenn das Bezugs-System um den Winkel α im Uhrzeigersinn verdreht wird. Für jede beliebige Fläche existieren also immer zwei zueinander senkrechte „Hauptachsen“, für die das Flächendeviationsmoment verschwindet und die Flächenträgheitsmomente Extremwerte annehmen.

Bei einem durch eine Querkraft belasteten Biegebalken treten außer Normalspannungen (durch das Biegemoment) auch noch Schubspannungen auf, die jedoch bei langen Balken (z.B. Länge/Durchmesser >4) sowohl für die Berechnung der Biegelinie wie auch für die Berechnung der Festigkeit des Balkens vernachlässigt werden können. Die Schubspannungen sind über die Querschnittsfläche nicht gleichmäßig verteilt und verursachen bei Belastung eine s-förmige „Verwölbung“ der Schnittfläche. Greift bei dünnwandigen Profilen die Querkraft-Belastung nicht im sog. „Schubmittelpunkt“ an, so verursachen die Schubspannungen eine Torsionsverdrehung des Balkens. Für die Berechnung der Lage des Schubmittelpunktes eines unsymmetrischen, dünnwandigen Profils ist es notwendig, die Schubspannungen durch Querkraftbelastung zu berechnen.



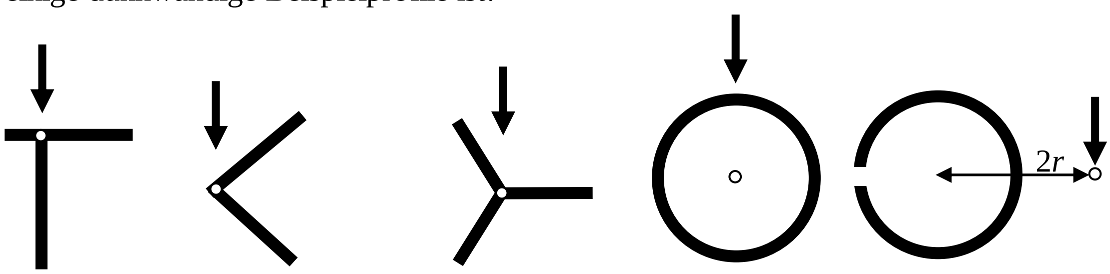
Bei einem durch eine Querkraft Q belasteten Profil mit der Breite b und dem Flächenträgheitsmoment I_y berechnet man die Schubspannungen $\tau(z)$ gemäß:

$$\tau(z) = \frac{Q}{I_y\ b} \cdot \int_{A^*} z\ dA^* \qquad \text{bzw:} \qquad \tau(s) = \frac{Q}{I_y\ t(s)} \cdot \int_{A^*} z\ dA^*$$

In dieser Formel ist $\int_{A^*} z\, dA^*$ das Integral über die (dunkelgraue) „Restfläche" A* , gleichbedeutend mit $z_S\, A^*$ (mit z_S als z-Abstand der Schwerpunktskoordinate der Fläche A* vom Koordinatenursprung). Bei einem dünnwandigen, geschlossenen Profil rechnet man ähnlich, wobei die Breite b jetzt durch die beiden Wandstärken $t(s)$ an der Stelle z (bzw s) gebildet wird (und I_y natürlich das Flächenträgheitsmoment des dünnwandigen Profils ist). Die Schubspannung verschwindet dann in der Symmetrieachse (d.h. $A^* = 0$ für $s = 0$).
Bei einem dünnwandigen, offenen Profil wird dieselbe Formel verwendet, mit s als „Umlaufkoordinate". Die Wandstärke ist dann $t(s)$, und es gilt: $\vec{Q} = \int_A \vec{\tau}(s)\, t(s)\, ds$
Damit sich der Balken bei Belastung nicht verdreht, muss die Querkraft im Schubmittelpunkt S angreifen, d.h. das Moment der Schubkräfte im Punkt O (z.B. im Koordinatenursprung) muss durch das Moment $\vec{r}_{OS} \times \vec{Q}$ gerade ausgeglichen werden:

$$\vec{r}_{OS} \times \vec{Q} = \int_A \vec{r}(s) \times \vec{\tau}(s)\, t(s)\, ds$$

Term $\vec{r}(s)$ ist dabei der Ortsvektor des Flächenelements $t(s)\, ds$. Dabei kann eine geeignete Wahl des Bezugspunktes O die Berechnung des Schubmittelpunktes sehr erleichtern. Zum Beispiel, beim oben rechts skizzierten offenen Profil wäre der geeignetste Bezugspunkt mittig im vertikalen Abschnitt des Profils zu finden, weil die Kräfte der Schubspannungen im vertikalen Teilstück in diesem Punkt kein Moment erzeugen. Die Lage des Schubmittelpunkts für einige dünnwandige Beispielprofile ist:



2.4 Zusammenhänge Normalspannungen, Schubspannungen und Verformungen

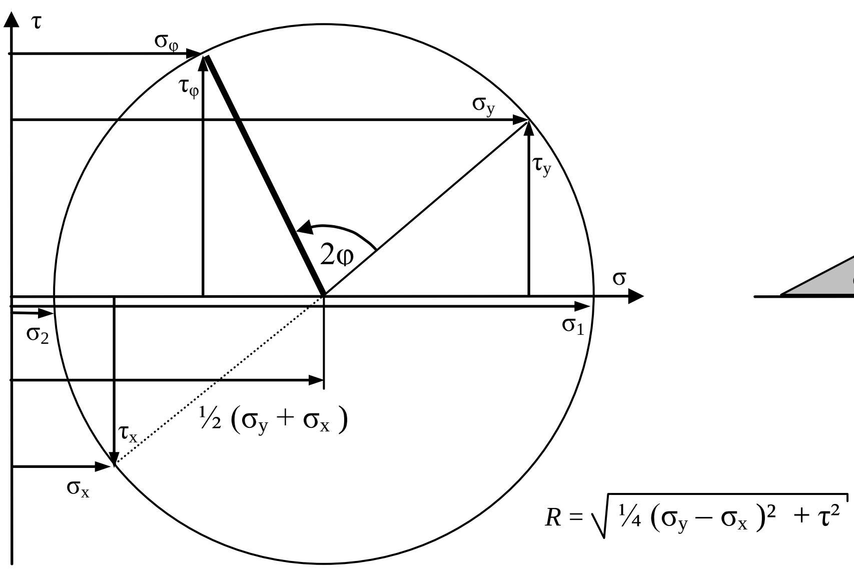
Liegt ein ebener Spannungszustand vor (wo alle Spannungsvektoren in derselben Ebene liegen), so können die Zusammenhänge zwischen Normalspannungen und Schubspannungen bei Drehung der Schnittrichtung durch den sog. Mohrschen Spannungskreis beschrieben werden. Setzt man die Gleichgewichtsbedingungen für ein infinitesimal kleines, prismatisches Volumenelement an (mit σ_x , σ_y und τ_x bzw. τ_y in den Schnittflächen *x* und *y* bekannt), so ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht für den Mittelpunkt der gedrehten Schnittfläche:

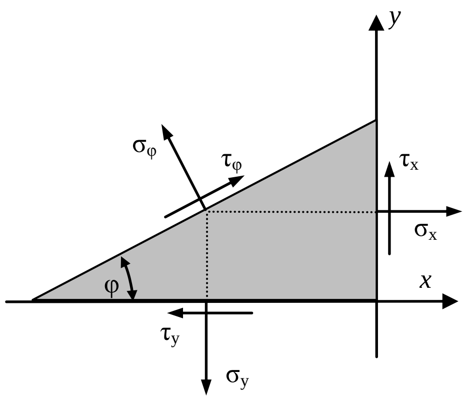
$$\tau_x = \tau_y \quad (= \tau)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht in *x* und *y*-Richtung ergeben sich die Spannungen σ_φ , τ_φ in der gedrehten Schnittfläche in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ als:

$$\sigma_\varphi = \tfrac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_x) + \tfrac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\varphi - \tau \sin 2\varphi$$

$$\tau_\varphi = \tfrac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi$$





Der Mohrsche Spannungskreis ist nichts weiter als eine grafische Veranschaulichung der formelmäßigen Zusammenhänge, die sich ergeben, wenn man die Gleichgewichtsbedingungen am prismatischen Volumenelement ansetzt. Es kann keinesfalls versucht werden, sich den Kreis gedanklich irgendwie auf dieses Volumenelement aufgesetzt vorzustellen, denn im Kreis wird der Winkel 2φ eingetragen und nicht der Winkel φ. Der Mohrsche Spannungskreis zeigt, dass es für den ebenen Spannungszustand stets zwei senkrecht zueinander stehende Hauptrichtungen 1 und 2 gibt, für welche die Normalspannungen Extremwerte annehmen und die Schubspannungen verschwinden:

$$\sigma_{1,2} = \tfrac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_x) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} (\sigma_y - \sigma_x)^2 + \tau^2}$$

$$\tan 2\varphi_{1,2} = 2\tau \;/\; (\sigma_x - \sigma_y)$$

Die maximalen Schubspannungen sind dann vom Betrag her gleich dem Radius des Kreises und im Winkel 45° zu den Hauptrichtungen zu finden.

Zum Festigkeitsnachweis von Bauteilen bei zusammengesetzter Beanspruchung benötigt man sog.Vergleichsspannungen σ_v, welche mit der zulässigen Materialfestigkeit verglichen werden können. Für spröde Werkstoffe ist die Normalspannungshypothese zutreffend, für zähe Werkstoffe eher die Gestaltsänderungsenergiehypothese:

Normalsp.Hyp: $\sigma_v = \sigma_1$

Schubsp.Hyp: $\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau^2}$

Gest.Änd.Energ.Hyp : $\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau^2}$

Ähnlich wie mit den Spannungen beim ebenen Spannungszustand (aber nicht genau identisch) verhält es sich mit den Verformungen beim ebenen Verzerrungszustand. Beim „Mohrschen Verzerrungskreis" fallen die Hauptverformungsrichtungen (ε_1 , ε_2) mit den Hauptspannungs-richtungen (σ_1 , σ_2) zusammen, die Hauptscherungen (γ) stehen im Winkel 45° dazu. Dreht man die Schnittrichtung um den Winkel φ, so erhält man für Dehnung und Scherung:

$$\varepsilon_\varphi = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\varphi \quad ; \quad -\tfrac{1}{2}\gamma_\varphi = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin 2\varphi$$

Verzerrungen sind lineare Funktionen der Spannungen (Hooksches Gesetz). Bei reinem Zug in *x*-Richtung, zum Beispiel, ergeben sich aber außer der Dehnung $\varepsilon_x = \sigma_x / E$ in *x*-Richtung auch noch Stauchungen in *y* und *z*-Richtung: $\varepsilon_y = -\nu\ \varepsilon_x$, $\varepsilon_z = -\nu\ \varepsilon_x$. Darin ist ν die Quer-kontraktionszahl, sie kann aus dem Emodul *E* und dem Schubmodul *G* berechnet werden:

$$E = 2G(1+\nu)$$

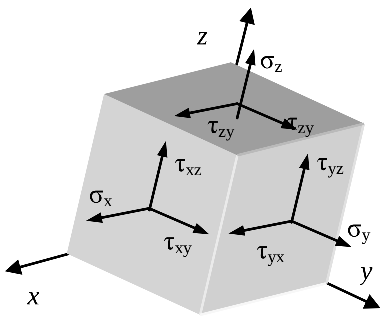
Für die Dehnungen ε_x , ε_y und ε_z im ebenen Verzerrungszustand gilt dann:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E$$
$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E$$

($\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$, und für die Scherung gilt: $\gamma = \tau / G$).

Im allgemeinen räumlichen Fall kann der Spannungszustand durch drei Spannungsvektoren (σ_x , τ_{xy} , τ_{xz}) , (τ_{yx} , σ_y , τ_{yz}) , (τ_{zx} , τ_{zy} , σ_z) („Spannungstensor") beschrieben werden, die in den drei orthogonalen Schnittflächen eines infinitesimal kleinen Würfels wirken. Dabei bezeichnet der erste Index die Schnittfläche und der zweite Index die Richtung. In der klassischen Elastomechanik gilt das Symmetriegesetz:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$



Die Dehnungen unter Berücksichtigung möglicher Wärmedehnungen $\alpha\,\Delta T$ sind dann allgemein:

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E + \alpha\,\Delta T$$
$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]/E + \alpha\,\Delta T$$
$$\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E + \alpha\,\Delta T$$

($\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$, $\gamma_{xz} = \tau_{xz} / G$, $\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$)

Mit diesen Formeln lassen sich für einige Spezialfälle Aufgaben stellen, bei denen entweder die Spannungen gegeben und die Dehnungen gefragt sind, oder bei denen für vorgegebene geometrische Bedingungen die Spannungen berechnet werden sollen.

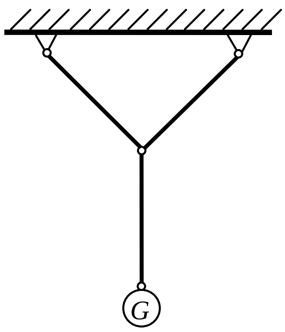
2.5 Die Formänderungsenergie

Verformungen sowie Lagerreaktionen von statisch bestimmten und statisch unbestimmten Systemen der Elastostatik lassen sich oftmals mit Hilfe von Energiemethoden leichter und eleganter lösen als mit konventionellen Methoden. Die äußere Belastung führt in einem elastischen System zu einer Änderung der Form, wobei die an dem System geleistete Arbeit in Form von sog. Formänderungsenergie gespeichert wird. Die Formänderungsenergien V für die einfachen Belastungsfälle des Balken sind:

$$V_{\text{Zug/Druck}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2(x)}{EA(x)}\,dx \;;\quad V_{\text{Torsion}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_x^2(x)}{GI_P(x)}\,dx \;;\quad V_{\text{Biegung}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_y^2(x)}{EI_y(x)}\,dx$$

Darin sind EA, GI_P und EI_y die Zug-, Torsions- bzw. Biegesteifigkeiten des Balkens und N, M_x und M_y die zugehörigen Belastungen. Term L ist die Balkenlänge. Der Satz von Castigliano sagt aus, dass die partielle Ableitung der gesamten in einem linear-elastischen System gespeicherten Formänderungsenergie V nach einer äußeren Kraft F gleich der Verschiebung f des Kraftangriffspunktes in Richtung dieser Kraft ist (bzw bei Torsion die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach einem äußeren Moment M gleich der Verdrehung φ des Angriffspunktes dieses Momentes ist): $\partial V/\partial F = f$ bzw. $\partial V/\partial M = \varphi$
Die Formänderungsenergie, zum Beispiel, gespeichert in einer aus drei gleichlangen Stäben (Länge L, Dehnsteifigkeit EA) bestehenden Lampenaufhängung (bei denen die beiden oberen im Winkel 45° abgespreizt worden sind), ist:

$$V_{\text{Zug}} = \frac{G^2 L}{2EA} + 2\left(\frac{(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,G)^2 L}{2EA}\right) = \frac{G^2 L}{EA}$$



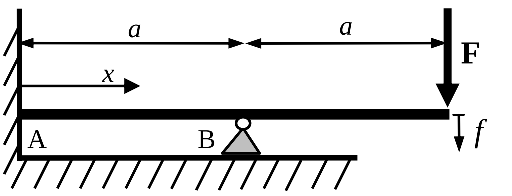
Die Formänderungsenergie abgeleitet nach dem Gewicht G ist dann:

$$\frac{\partial V_{\text{Zug}}}{\partial G} = \frac{2\,G\,L}{EA}$$

Dies entspricht genau der Absenkung der Lampe durch ihre Gewichtskraft G.

Wendet man den Satz von Castigliano auf Lagerreaktionskräfte (oder –Momente) an, die keine Arbeit leisten, weil ihr Angriffspunkt entweder fest ist oder nur senkrecht zur Richtung der Kraft verschoben wird, so ergibt sich der Satz von Menabrea: Die Lagerreaktionskräfte F nehmen solche Werte an, dass die Formänderungsenergie zum Extremum wird ($\partial V/\partial F = 0$).

Dieser Satz eignet sich insbesonders zur Berechnung der Lagerreaktionen von statisch unbestimmten Systemen. In einem Biegebalken der Länge $2a$ und der Biegesteifigkeit EI, zum Beispiel, der mittig bei B durch ein zusätzliches Gelenklager abgestützt ist und am rechten, freien Ende durch die Kraft F belastet wird, wirkt im linken Bereich das Moment
$M(x) = F_B\,(a-x) - F\,(2a-x)$
und im rechten Bereich das Moment
$M(x) = -F\,(2a-x)$.



Die Formänderungsenergie ist dann:

$$V_{\text{Biegung}} = \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(F_B\,(a-x) - F\,(2a-x)\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_a^{2a} \left(-F\,(2a-x)\right)^2 dx$$

Zur Berechnung der unbekannten Lagerkraft F_B liefert der Satz von Menabrea die Bedingung:

$$\frac{\partial V}{\partial F_B} = \frac{1}{2EI}\int_0^a 2\left(F_B\,(a-x) - F\,(2a-x)\right)(a-x)\;dx = 0 \quad \text{oder nach Auswertung} \quad F_B = \frac{5}{2}\,F$$

Zur Berechnung der Absenkung f am rechten Balkenende liefert der Satz von Castigliano:

$$f = \frac{\partial V}{\partial F} = \frac{1}{2EI}\int_0^a 2\left(F_B\,(a-x) - F\,(2a-x)\right)(x-2a)\;dx + \frac{1}{2EI}\int_a^{2a} 2F\,(2a-x)^2\,dx = \frac{(-5\,F_B + 16F)\,a^3}{6\,EI}$$

Nach Einsetzen von F_B erhält man schließlich als Absenkung $f = \dfrac{7\,Fa^3}{12\,EI}$

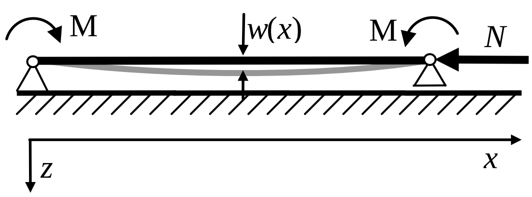
Energiemethoden der Elastostatik zur Berechnung von vielfach statisch unbestimmten Systemen spielten früher eine große Rolle in der Festigkeitslehre, haben aber heute aber dank verbesserter numerischer Verfahren (Finite Elemente) etwas an Bedeutung verloren.

3. Knickung

3.1 Instabile Druckstäbe

Ein langer gerader, auf Druck belasteter Balken knickt aus, sobald die Belastung einen kritischen Wert erreicht hat. Zur Berechnung dieser kritischen Drucklast wird der Balken zunächst durch ein virtuelles Biegemoment zusätzlich belastet (welches später gleich Null gesetzt wird), dann wird die Biegelinie für das verformte Bauteil aufgestellt. Betrachtet sei z.B. ein statisch bestimmt gelagerter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI_y), in den eine konstante Normalkraft N und in beiden Gelenklagern zusätzlich ein konstantes Biegemoment M eingeleitet werden. Die Differentialgleichung für die Biegelinie ist dann:

$$EI_y\, w''(x) = -M(x) = -(M + N\,w(x))$$



oder umgeformt

$$w''(x) + (N/EI_y)\,w(x) = -M/EI_y$$

Die allgemeine Lösung $\quad w(x) = \text{A}\sin\left(\sqrt{N/EI_y}\;x\right) + \text{B}\cos\left(\sqrt{N/EI_y}\;x\right) - M/N$

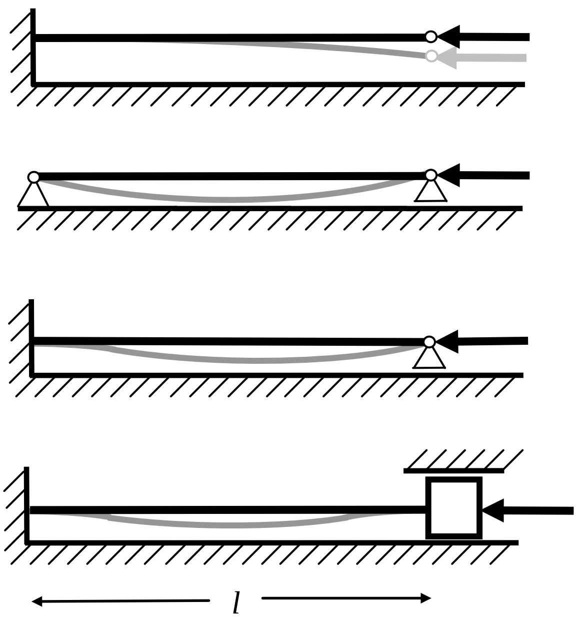
dieser inhomogenen linearen DGL lässt sich durch die Randbedingungen $w(0) = 0$; $w(l) = 0$ an den Spezialfall anpassen. Für die Integrationskonstanten ergibt sich $\text{B} = M/N$, und

$$\text{A} = \frac{M}{N}\;\frac{1 - \cos\left(\sqrt{N/EI_y}\;l\right)}{\sin\left(\sqrt{N/EI_y}\;l\right)}$$

Wenn nun die Last N für ein verschwindend kleines Moment M langsam gesteigert wird, so bleibt die Integrationskonstante A (und damit die Biegelinie) solange gleich Null, bis der Nenner der obigen Gleichung ebenfalls zu Null wird. Dies ist der Fall bei $\sqrt{N/EI_y}\;l = \pi$

Für die Kraft $N_{\mathrm{kritisch}} = EI_y\, \pi^2/l^2$ können also auch dann noch Biegeverformungen auftreten, wenn das externe Moment M verschwindet.

Von Bedeutung sind die vier sog. „Eulerfälle" $N_{\mathrm{kritisch}} = EI_y\, \pi^2/s_k^{\ 2}$ mit:



I $s_k = 2\,l$

II $s_k = l$

III $s_k = 0.7\,l$

IV $s_k = 0.5\,l$

Term I_y ist das Flächenträgheitsmoment der geringsten Biegesteifigkeit, s_k ist die Knicklänge.

Außer diesen vier Eulerfällen gibt es noch weitere Knickfälle, in der Praxis lassen sich aber etliche Knickprobleme durch eine geeignete Adaptation eines diese vier Fälle lösen.
Jedoch muss betont werden, dass die meisten Knickprobleme keine Eulerfälle sind, und dass die Gefahr von Fehleinschätzungen sehr groß ist. Im Zweifelsfall ist es immer sinnvoll, die Knickbedingung anhand der Biegelinie für den verformten Balken abzuleiten.

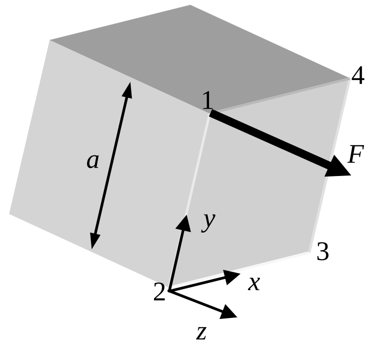
3.2 Schlankheitsgrad

Knickung tritt nur dann auf, wenn der Druckstab ausreichend lang ist: Ist der Stab kurz, so ist die rechnerische Knickspannung $\sigma_{\mathrm{kritisch}} = N_{\mathrm{kritisch}}/A$ höher als die Druckfestigkeit des Materials, und der Stab wird zerdrückt, bevor er ausknicken würde (A ist dabei die Querschittsfläche des Druckstabes). Wird die Proportionalitätsgrenze σ_P (Hookesches Gesetz) überschritten, so tritt „plastisches Knicken" ein. Ein Maß für das Auftreten von elastischem Knicken ist der Schlankheitsgrad λ (wobei die kritische Knickspannung $\sigma_{\mathrm{kritisch}}$ als Funktion von λ die „Euler- Hyperbel" darstellt):

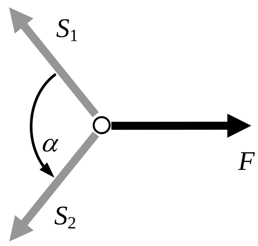
$$\lambda = s_k \sqrt{\frac{A}{I_y}} \quad ; \quad \sigma_{\mathrm{kritisch}} = N_{\mathrm{kritisch}}/A = E\,\pi^2/\lambda^2$$

Hat z.B. Baustahl einen Emodul von 200 kN/mm² und eine Proportionalitätsgrenze von 200 N/mm², so ergibt sich ein Grenz-Schlankheitsgrad von $\lambda = \pi\sqrt{E/\sigma_P} \approx 100$. Bei einem Stab mit quadratischen Querschnitt ($I_y = A^2/12$) entspricht das einer Knicklänge $s_k = \lambda\sqrt{A/12}$ oder $s_k \approx 30\sqrt{A}$, also ein Verhältnis von Länge zu Dicke von 30 für den Eulerfall II ($s_k = l$).

Übungsaufgaben zum Kapitel 1 (Statik):



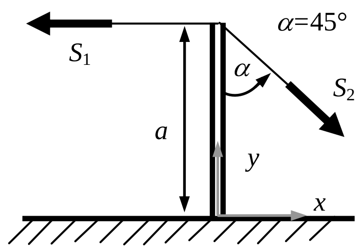
Aufgabe 1-1: Gegeben sei nebenstehender Würfel, bei dem an der Kante 1 die Kraft F angreift. Ermitteln Sie jeweils für die Kanten 2, 3 und 4 das zu dieser Kraft F äquivalente Kräftesystem (d.h. die Kraft und das Moment, welche zusammen der Kraft F statisch gleichwertig sind).



Aufgabe 1-2: An einem Knoten greifen zwei gleichgroße Seilkräfte S_1 und S_2 an (Betrag jeweils S). Berechnen Sie:

a.) die für Gleichgewicht notwendige horizontale Kraft F ;

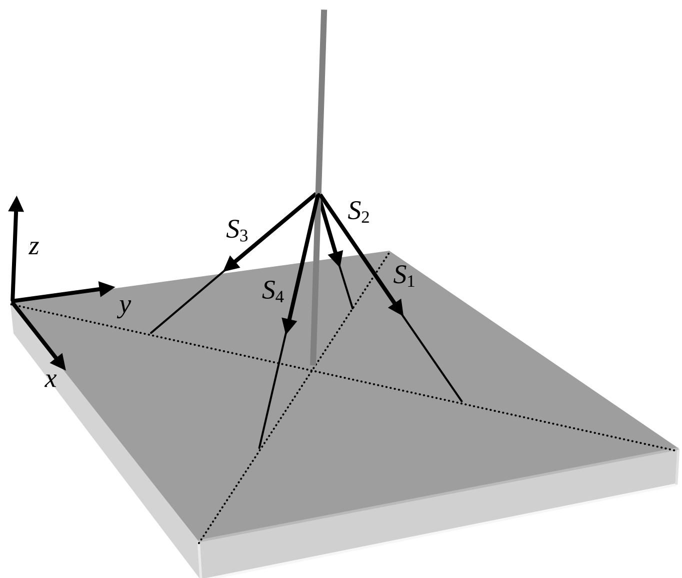
b.) den Betrag von F für $\alpha = 120°$.



Aufgabe 1-3: An einem Zaunpfahl sind zwei Drahtseile befestigt, über welche an seiner Spitze eine horizontale Kraft S_1 und im Winkel $\alpha = 45°$ eine Kraft S_2 eingeleitet werden.

a.) Berechnen Sie Kraft- und Momentenwirkung der Kräfte S_1 und S_2 im Einspannpunkt des Pfostens (Koordinatenursprung).

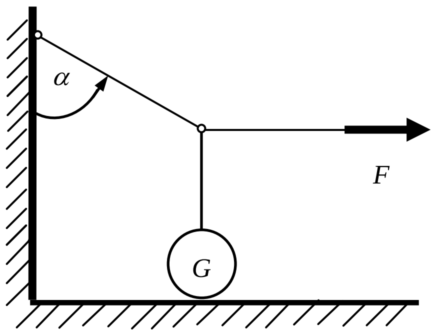
b.) Wie groß muß die Kraft S_2 gemacht werden, damit bei gegebener Kraft S_1 die Momentenwirkung im Einspannpunkt gerade verschwindet, und wie groß ist dann die Kraftwirkung der beiden Kräfte?



Aufgabe 1-4: Ein Antennenmast wird durch vier gleiche Seile gestützt (jede Seilkraft hat den gleichen Betrag S), wobei der Winkel zwischen Mast und Seil sowie zwischen Seil und Boden jeweils 45° beträgt (siehe Skizze).

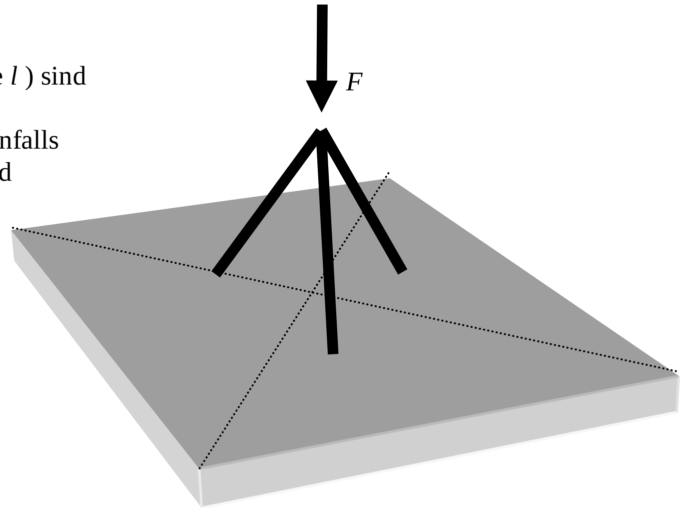
a.) Wie lautet die Darstellung der vier Kraftvektoren im eingezeichneten Koordinatensystem?

b.) Wie groß ist der Betrag des Biegemomentes im Boden-Einspannpunkt des Mastes, wenn ein Seil reißt und die Seile



Aufgabe 1-5: Mit Hilfe eines in der Wand befestigten Seiles soll ein Gewicht G angehoben werden, dazu wird am Seilende mit der horizontalen Kraft F gezogen (siehe Skizze). Wie groß muss die Kraft F werden, damit das Gewicht gerade angehoben wird, und wie groß wird dann die maximale Kraft S im Seil?

Aufgabe 1-6: Drei Stützen (jeweils der Länge l) sind so aufgestellt, dass die Verbindungslinien der Aufstützpunkte ein gleichseitiges Dreieck ebenfalls mit der Kantenlänge l bilden. Das Gestell wird mittig mit der vertikalen Kraft F belastet.



a.) Wie groß ist die vertikale Kraftkomponente A_V in jedem der drei Aufstützpunkte?

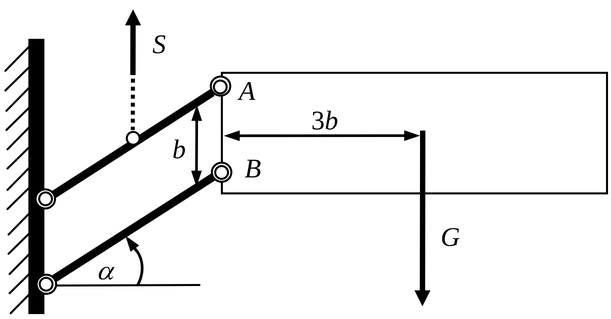
b.) Wie groß ist die horizontale Kraftkomponente A_H in den Aufstützpunkten?

Aufgabe 1-7: Eine Arbeitsplattform (Gewicht G) ist durch zwei parallele Stangen an der Wand befestigt. Die Stangen sind sowohl an der Plattform (Lager A und B) als auch an der Wand drehbar gelagert; in der Mitte der oberen Stange jedoch ist eine Kette befestigt (vertikale Kettenkraft S), mit welcher die Plattform in der Höhe einstellbar ist (Winkel α).

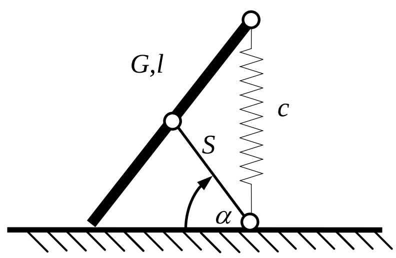
a.) Berechnen Sie in den Lagern A und B die vertikalen und horizontalen Kraftkomponenten als Funktion des Winkels α.

b.) Für welchen Winkel α_{min} nimmt die im Lager A zu übertragende Kraft einen minimalen Wert an?

c.) Berechnen Sie die Kettenkraft S.



Aufgabe 1-8: Ein Brett (Gewicht G, Länge l) wird mit Hilfe einer mittig angebrachten Stütze S (Länge $l/2$, Gewicht vernachlässigbar) aufgestellt. Die Vertikalfeder (Steifigkeit c) ist beim Winkel $\alpha_o = 60°$ unbelastet.



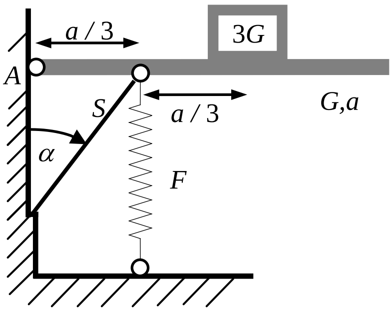
Berechnen Sie:

a.) Die Kraft S in der Stütze für $\alpha = \alpha_o = 60°$ (gestützt durch Bodenreibung),

b.) die Federkraft F als Funktion des Winkels α.

c.) den Winkel α_1 für den Fall, dass die Reibung in den Aufstützpunkten vernachlässigt werden kann.

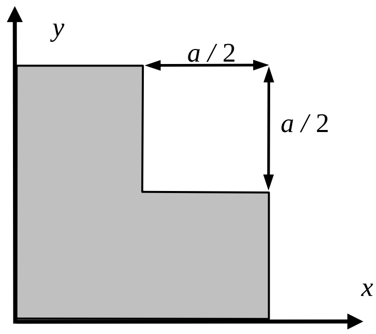
Aufgabe 1-9: Ein Brett (Gewicht G, Länge a) wird mit Hilfe einer Stütze S (Gewicht vernachlässigbar, Winkel $\alpha = 30°$) aufgestellt und durch ein Gewicht $3G$ belastet. Eine Vertikalfeder (Federkraft F) unterstützt das Ganze. Berechnen Sie:



a.) Den Abstand x des gemeinsamen Schwerpunktes von der Wand;

b.) die Stabkraft S als Funktion der Federkraft F;

c.) für $F = 0$ die Reaktionen A_V und A_H im Wandlager A.



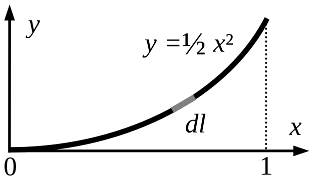
Aufgabe 1-10: Gegeben sei die nebenstehende Fläche, die sich ergibt, wenn man aus einem Quadrat (Kantenlänge a) ein Viertel heraustrennt.

a.) Konstruieren Sie die Schwerpunktskoordinaten.

b.) Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes.

c.) Zerteilen Sie die Figur in vier deckungsgleiche Teilflächen.

Aufgabe 1-11: Es sollen die Schwerpunktskoordinaten eines zu einer Parabel zurecht gebogenen (homogenen) Drahtes berechnet werden (definiert durch die Funktion $y = ½\, x^2$ im Bereich zwischen 0 und 1).



Berechnen Sie:

a.) die Gesamtlänge L des Drahtes

($dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+(y')^2}\; dx$) .

b.) die Schwerpunktskoordinate x_S .

c.) die Schwerpunktskoordinate y_S .

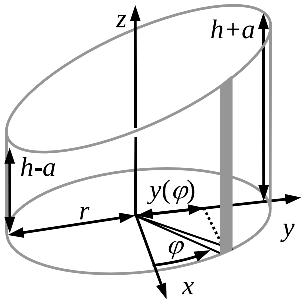
Aufgabe 1-12: Aus einem dünnwandigen Rohr (Radius r) wird durch einen rechtwinkligen und durch einen schrägen Schnitt ein Ring herausgeschnitten, dessen Schwerpunktslage jetzt berechnet werden soll. Der Ring hat mittlere Höhe h (durch den Schrägschnitt um a vermindert bzw. erhöht.)

a.) Wie groß ist die Oberfläche A des Rings.

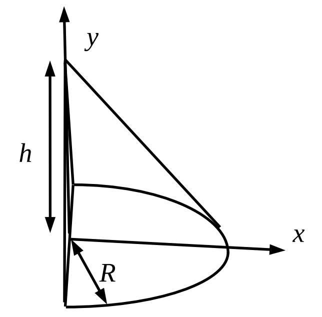
b.) Berechnen Sie die Fläche dA eines vertikalen Streifchens der Breite $r\, d\varphi$ in Abhängingkeit von der Koordinate φ.

c) Berechnen Sie in Abhängingkeit von φ die Koordinate $y(\varphi)$ des Steifchens dA.

d.) Berechnen Sie die Schwerpunktskoordinate y_S.



Aufgabe 1-13: Gesucht sind die Koordinaten (x_S und y_S) des Schwerpunktes eines Bleches, das zu einem vertikal halbierten Kreiskegels (Halbkreis Radius R, Höhe h) gebogen worden ist (ohne die ebenen Seitenteile).



a.) Wie groß ist die Oberfläche A des Blechs (ohne die ebenen Seitenteile!).

b.) Wie groß ist der Abstand $x(r)$ des Schwerpunktes eines Halbkreisringes mit dem Radius r vom Mittelpunkt?

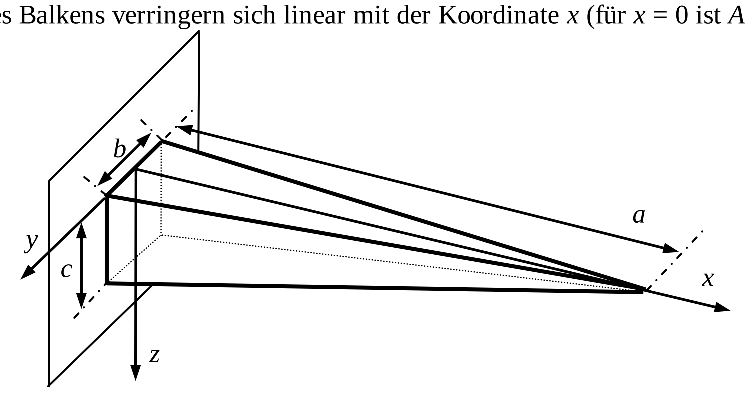
c.) Ermitteln Sie die Funktion r (y), die den Radius der horizontalen Kegelschnittkurve (=Halbkreis) als Funktion der Höhe y darstellt.

d.) Berechnen Sie die Koordinate x_S des Schwerpunkts der Oberfläche des halbierten Kreiskegels
(ohne die ebenen Seitenteile!).

Aufgabe 1-14: Gesucht sind nun die Volumen-Schwerpunktskoordinaten (x_S und y_S) der in Aufgabe 1-13 dargestellten Figur:

a.) Zeigen Sie die Berechnung des Volumens $V=\pi R^2 h/6$
b.) Wie groß ist der Abstand x (r) des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche mit dem Radius r vom Mittelpunkt?
c.) Ermitteln Sie die Funktion r (y), die den Radius der horizontalen Kegelschnittfläche (=Halbkreis) als Funktion der Höhe y darstellt.
d.) Berechnen Sie die Koordinate x_S des Volumenschwerpunkts des halbierten Kreiskegels.
e.) Geben Sie auch die Koordinate y_S des Volumenschwerpunkts des halbierten Kreiskegels an.

Aufgabe 1-15: Aufgabe ist es, die Berechnung der Volumenschwerpunktskoordinaten x_S und z_S eines spitzkeil-förmigen, prismatischen Balkens zu zeigen. Breite und Höhe der rechteckigen Querschittsfläche A des Balkens verringern sich linear mit der Koordinate x (für $x = 0$ ist $A = b\ c$); die Länge des Balkens sei a.



Berechnen Sie:

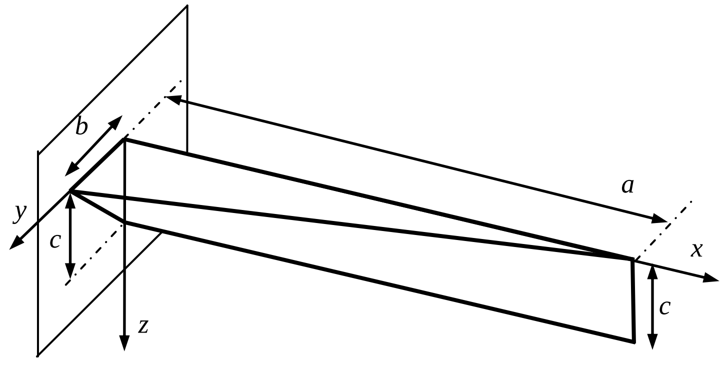
a.) die Querschnittsfläche $A(x)$,

b.) das Gesamtvolumen V,

c.) die Schwerpunktskoordinate x_S ,

d.) die Schwerpunktskoordinate z_S .

Aufgabe 1-16: Aufgabe ist es, die Volumenschwerpunktskoordinaten x_S , y_S und z_S eines spitzkeilförmigen, prismatischen Balkens zu berechnen. Die Breite b der dreieckigen Querschittsfläche A des Balkens verringert sich linear mit der Koordinate x, die Länge des Balkens sei a und die Höhe konstant c.



Berechnen Sie:

a.) die Querschnittsfläche $A(x)$,

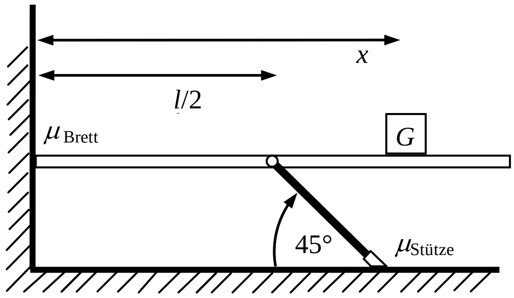
b.) das Gesamtvolumen V,

c.) die Schwerpunktskoordinate x_S ,

d.) die Schwerpunktskoordinate y_S ,

e.) die Schwerpunktskoordinate z_S .

Aufgabe 1-17: Ein homogenes Brett (Länge l, Eigengewicht $G/4$) soll als Träger für ein Gewicht G horizontal an der linken Wand gehalten werden. Am Brett ist mittig (bei $l/2$) eine reibungsfrei drehbare Stütze angebracht, welche sich mit einem gummierten Fuß im Winkel von 45° am Boden abstützt. Reibung verhindert ein Abrutschen der Stütze am Boden (Beiwert $\mu_{Stütze}$). Reibung zwischen Brett und Wand soll das Brett horizontal halten (Beiwert μ_{Brett}).



Das Gewicht G wird im Abstand x von der Wand auf des Brett gelegt, dabei soll untersucht werden, wie weit G maximal nach außen von der Wand weg (x_{max}) verschoben werden kann.

a.) Wie groß muss der Reibwert $\mu_{Stütze}$ mindestens sein, damit die Stütze am Boden nicht wegrutscht?

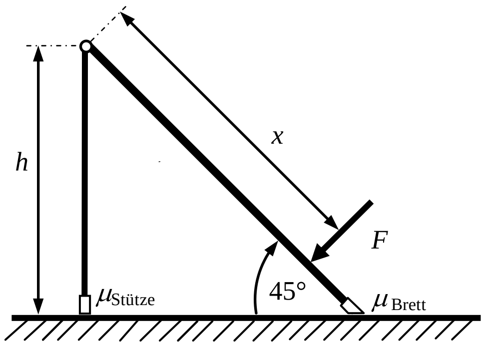
b.) Welcher Reibwert μ_{Brett} ist bei $x = l/2$ (Gewicht liegt in der Balkenmitte) für Gleichgewicht mindestens erforderlich?

c.) Zeichnen Sie das Freikörperbild für das Brett für den Fall $x > l/2$ und tragen Sie sämtliche auf das Brett einwirkenden äußeren Kräfte vorzeichenrichtig in das Bild ein.

d.) Was würde sich für $x < l/2$ (Gewichtskraft G links von der Brettmitte) am Freikörperbild ändern?

e.) Berechnen Sie den maximalen Wert x_{max}, für den gerade noch Gleichgewicht herrscht.
Wie groß muss μ_{Brett} mindestens sein, damit G ganz nach außen verschoben werden kann ($x_{max} = l$)?

Aufgabe 1-18: Ein Brett (Länge l), an dessen linken Ende über ein reibungsfreies Drehgelenk eine Vertikalstütze (Höhe $h = \sqrt{2}\, l/2$) befestigt ist, wird winklig zum Boden aufgestellt (siehe Skizze).
Gummierte Überzüge („Schuhe“) an den Aufstützstellen sollen Wegrutschen des Gestells verhindern: Reibung verhindert ein Abrutschen der Stütze am Boden (Beiwert $\mu_{Stütze}$); und Reibung zwischen Brett und Boden soll das Brett im Winkel von 45° halten (Beiwert μ_{Brett}). Nun wird das Brett im Abstand x vom linken Ende durch eine Querkraft F belastet; dabei soll untersucht werden, in welchem Bereich x variiert werden kann, ohne dass das Gestell wegrutscht. Die Eigengewichte von Brett und Stütze können gegenüber F vernachlässigt werden.



a.) Welcher Reibwert $\mu_{Stütze}$ ist mindestens erforderlich um ein Wegrutschen der Stütze zu verhindern?

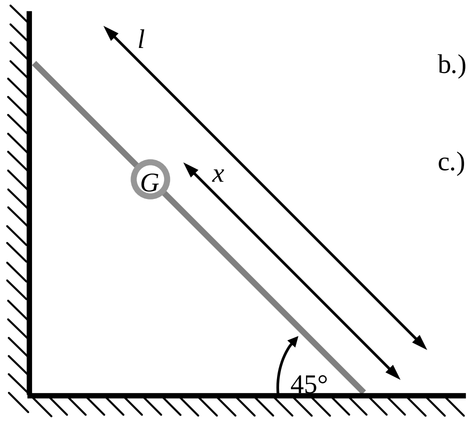
b.) Welcher Reibwert μ_{Brett} ist bei $x = l$ (d.h. F drückt auf den rechten Gummischuh) mindestens erforderlich um ein Wegrutschen des Bretts am Boden zu verhindern?

c.) Zeichnen Sie das Freikörperbild für das Brett für den Fall $l/2 < x < l$ und tragen Sie sämtliche auf das Brett einwirkenden äußeren Kräfte vorzeichenrichtig in das Bild ein.

d.) Berechnen Sie den für Gleichgewicht erforderlichen mindesten Reibwert μ_{Brett} in Abhängigkeit von x.

e.) Wie groß müsste der Wert μ_{Brett} werden, damit F genau in der Mitte des Brettes angreifen könnte ($x = l/2$)?

Aufgabe 1-19: Ein Stab der Länge l wird wie skizziert im Winkel von 45° zum Boden an die Wand gelehnt, dabei soll Reibung zwischen Stab und Boden sowie Reibung zwischen Stab und Wand ein Abrutschen des Stabes verhindern (Reibwert gleichermaßen $\mu = 0.5$). Der Stab trägt im Abstand x von seinem unteren Ende ein Gewicht G, demgegenüber sei das Eigengewicht des Stabes vernachlässigbar gering.

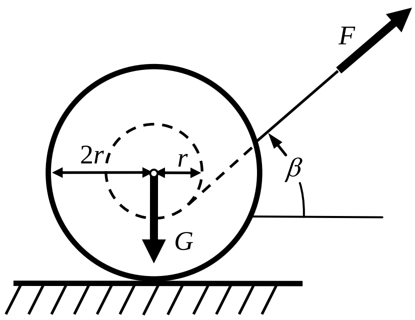


a.) Zeichnen Sie das Freikörperbild des Stabes und tragen Sie alle einwirkenden Kräfte vorzeichenrichtig in das Bild ein.

b.) Berechnen Sie den maximalen Wert x, für den der Stab gerade noch nicht wegrutscht

c.) Wie groß müsste der Reibwert μ mindestens sein, damit das Gewicht ganz nach oben geschoben werden könnte ($x = l$) ?

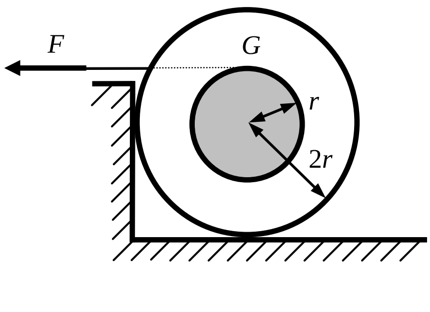
Aufgabe 1-20: Eine Kabeltrommel (Innenzylinder-Radius r, Außenradius $2r$, Gewicht G) liegt so auf einer horizontalen Ebene, dass sie rollen kann wenn man leicht mit der Kraft F an dem heraushängenden Kabelende zieht (siehe Skizze).
Ist der Winkel β klein (z.B. 0°), so rollt die Trommel nach rechts, ist β groß (z.B. 90°), so rollt sie nach links.



a.) Für welchen Winkel β rollt die Trommel nicht? (Haftreibung vorausgesetzt)

b.) Wie groß muss bei diesem Winkel das Verhältnis F/G werden, damit die Trommel zu rutschen anfängt (Reibungsbeiwert $\mu = 0.4$)

Aufgabe 1-21: Am Seil einer Jojo-Rolle (Innenradius r, Außenradius 2 r, Gewicht G) wird mit der Kraft F nach links gezogen. Der Reibwert zwischen Rolle und Wand und Rolle und Boden sei μ .

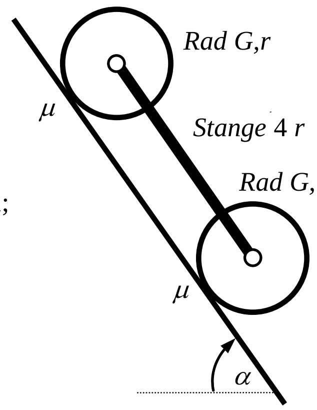


a.) Ab welcher Kraft F_1 beginnt sich die Rolle rutschend zu drehen?

b.) Ab welcher Kraft F_2 hebt sie vom Boden ab?

c.) Wie groß muss der Reibwert μ sein, damit die Rolle ohne zu rutschen nach oben rollt?

Aufgabe 1-23: Ein Fahrgestell besteht aus zwei Rädern (jeweils Gewicht G, Radius r) die durch eine (als masselos zu betrachtende) Stange mit der Länge $4\,r$ zwischen den Radnaben verbunden sind.
Das Fahrgestell befindet sich auf einer schiefen Ebene („Boden“).
Berechnen Sie:

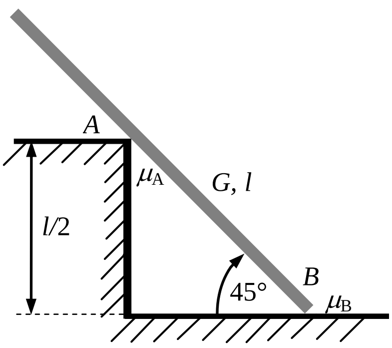


a.) den Winkel α_0, für den das Fahrgestell gerade noch nicht kippt, wenn beide Radnaben blockiert sind und die Räder auf dem Boden nicht rutschen;

b.) für den Reibwert $\mu = 0.5$ zwischen Rädern und Boden den Winkel α_1, für den das Fahrgestell nicht rutscht, wenn beide Räder blockiert sind;

c.) für den Reibwert $\mu = 0.5$ den Winkel α_2, für den das Fahrgestell nicht rutscht, wenn das obere Rad blockiert und das untere Rad frei drehbar ist.

Aufgabe 1-24: Ein Stab (Gewicht G, Länge l) soll im Winkel von 45° auf eine Stufe (Stufenhöhe $l/2$) gelegt werden. Reibung bei A (zwischen Stab und Kante, Beiwert μ_A) und bei B (zwischen Stab und Boden, Beiwert μ_B) soll verhindern, dass der Stab wegrutscht.



Berechnen Sie:

a.) den mindestens erforderlichen Reibwert μ_A für den Fall, dass die Reibkraft bei B verschwindet (d.h. für $\mu_B = 0$) ;

b.) den mindestens erforderlichen Reibwert μ_B für den Fall, dass die Reibkraft bei A verschwindet (d.h. für $\mu_A = 0$) ;

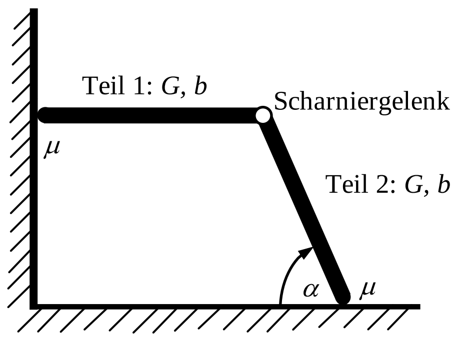
c.) den mindestens erforderlichen Beiwert μ für den Fall, dass die beiden Reibbeiwerte gleich sind ($\mu = \mu_A = \mu_B$) .

Aufgabe 1-25: Ein mittig zusammenklappbares Brett besteht aus zwei gleichartigen Teilstücken (jeweils Gewicht G, Breite b) , die durch ein reibungsfrei drehbares Scharniergelenk zusammengefügt worden sind. Das Brett wird nun wie skizziert aufgestellt: Reibung zwischen Wand und linker Kante (Beiwert μ) hält Teilstück 1 horizontal; Reibung zwischen Boden und rechter Kante hält Teilstück 2 im Winkel α zum Boden (Beiwert ebenfalls μ). Berechnen Sie:

a.) den maximalen Winkel α_{max} , für den die Reibkraft an der Wand gerade noch ausreicht um das Brett zu halten.

b.) den minimalen Winkel α_{min} , für den die Reibkraft am Boden gerade noch ausreicht um das Brett zu halten.

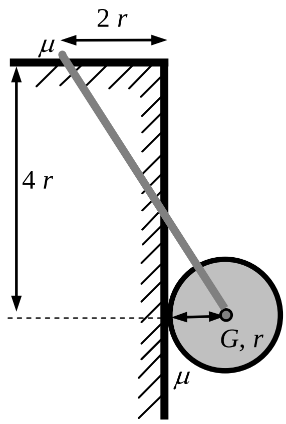
c.) den mindestens erforderlichen Beiwert μ , für den das Brett überhaupt so aufgestellt werden kann.

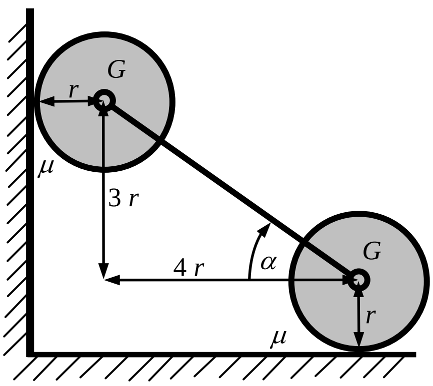


Aufgabe 1-26: Ein (als masselos zu betrachtender) Draht wurde auf die Länge 5 r rechtwinklig zurechtgebogen und hält nun eine über eine Kante gehängte Rolle (Gewicht G, Radius r).
Reibung hält das abgewinkelte obere Ende des Drahtes im Abstand 2 r von der Kante. Berechnen Sie:

a.) den mindestens erforderlichen Reibungsbeiwert μ_1 für den Fall, dass die Befestigung des Drahtes in der Mittelachse der Rolle frei drehbar ist und

b.) den mindestens erforderlichen Beiwert μ_2 für den Fall, dass die Befestigung des Drahtes in der Mittelachse der Rolle nicht drehbar ist und der Reibungsbeiwert zwischen Rolle und Seitenwand ebenfalls μ_2 beträgt





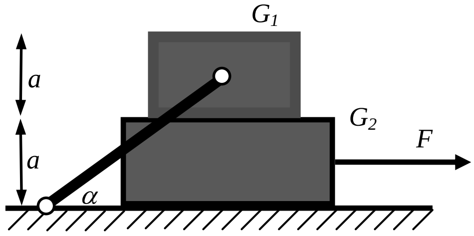
Aufgabe 1-27: Ein Fahrgestell besteht aus zwei gleichartigen Rädern (jeweils Gewicht G, Radius r) verbunden durch eine Stange (Länge 5 r, Gewicht vernachlässigbar). Es wird wie skizziert winklig an die Wand gestellt ($\tan\alpha = ¾$), dazu wird das untere Rad blockiert, während das obere zunächst frei drehbar bleibt.

Berechnen Sie:

a.) den mindestens erforderlichen Reibwert μ zwischen unterem Rad und Boden, für den die Reibkraft gerade noch ausreicht, um das Fahrgestell in der gezeichneten Lage zu halten.

b.) den mindestens erforderlichen Beiwert μ, wenn nun auch das obere Rad blockiert wird und der Reibwert μ an der Wand der gleiche wie der am Boden ist.

Aufgabe 1-28: Ein durch einen Bremsklotz (Gewicht G_1, Höhe a) gehaltener Stein (Gewicht G_2, Höhe ebenfalls a) wird mit der Kraft F nach rechts gezogen. Der Reibwert zwischen Klotz, Stein und Boden sei gleichermaßen μ; der Winkel der Stange, mit der Bremsklotz am Boden befestigt ist, sei $\alpha = 45°$.



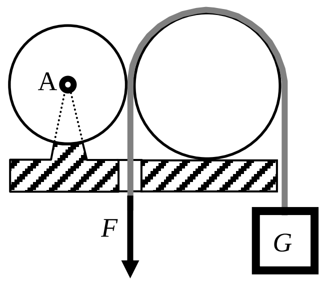
a.) Zeichnen Sie die Freikörperbilder für Bremsklotz und Stein und berechnen Sie die zum Herausziehen erforderliche Kraft F.

b.) Wie groß muss der Reibwert μ mindestens sein, damit der Stein nicht herausgezogen werden kann (Selbsthemmung)?

Aufgabe 1-29: Die betrachtete Seilführung besteht aus einer kleineren Rolle, die bei A mittig frei drehbar gelagert ist und einer größeren Rolle, die bei B auf dem Boden horizontal rollen kann. Wenn nun eine Kraft F ein Gewicht G an einem über die große Rolle geführten Seil (Umschlingungswinkel π) hochzuziehen versucht, so wird das Seil zwischen den beiden Rollen eingeklemmt, wobei die kleinere Rolle ein Linksrollen der größeren Rolle verhindert.

a.) Welche Kraft F_{min} ist für Gleichgewicht mindestens erforderlich?.

b.) Welcher Haftreibungswert μ_{Boden} (bei B zwischen Rolle und Boden) ist mindestens erforderlich, damit bei eingeklemmten Zustand des Seiles die Rolle auf dem Boden (bei beliebig großer Kraft F) nicht wegrutscht?

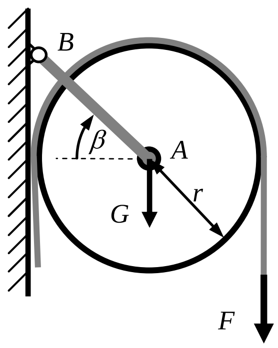


c.) Welche Kraft F ist zum Hochziehen des Gewichtes G erforderlich, wenn das Seil auf der Rollenoberfläche rutscht und der Reibbeiwert μ_{Seil} beträgt?

d.) Welcher Wert μ_{Seil} ist für Selbsthemmung erforderlich?

e.) Wie ändert sich der für Selbsthemmung erforderliche Reibwert μ_{Seil}, wenn die freie Drehbarkeit der kleinen Rolle bei A blockiert wird und der Reibbeiwert zwischen kleiner Rolle und Seil ebenfalls μ_{Seil} beträgt?

Aufgabe 1-30: Eine Rolle (Radius r, Gewicht G) ist durch einen Stab (Winkel $\beta = 45°$) im Punkt B gelenkig an der Wand befestigt. Die Rolle hält ein Seil (Umschlingungswinkel 180°, Masse und Dicke vernachlässigbar), an dem mit der Kraft F gezogen wird. Der Reibwert μ zwischen Rolle und Seil sei gleich dem Reibwert zwischen Seil und Wand.



a.) Ab welcher maximaler Zugkraft F_1 beginnt das Seil zu rutschen, wenn die Rolle um die Achse A reibungsfrei drehen kann?

b.) Bei welchem Reibwert μ_1 beginnt im Fall a.) die Selbsthemmung?

c.) Ab welcher maximaler Zugkraft F_2 beginnt das Seil zu rutschen, wenn die Drehung der Rolle um die Achse A blockiert ist?

d.) Bei welchem Reibwert μ_2 beginnt im Fall c.) die Selbsthemmung?
(Anmerkung: zu verwenden ist die Näherung $e^x \cong 1 + x$)

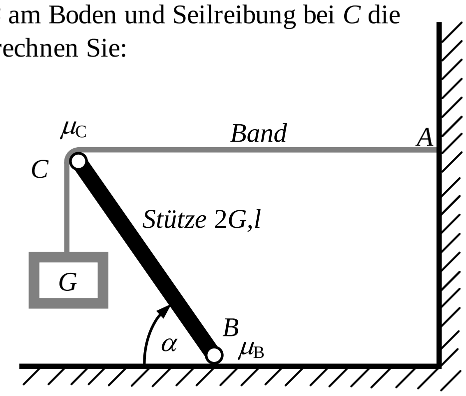
Aufgabe 1-31: Ein bei A in der Wand befestigtes Band wird durch eine Stütze (Gewicht 2 G, Länge l) horizontal gehalten und trägt ein Gewicht G. Reibung hält bei B am Boden und Seilreibung bei C die Stütze im Gleichgewicht (Reibwerte μ_B und μ_C , Winkel α). Berechnen Sie:

a.) die Kraft F_A im horizontalen Teil des Bandes;

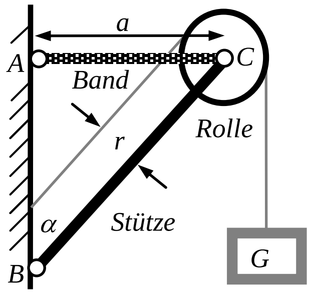
b,) die Lagerreaktionen F_{BV} und F_{BH} in der Stütze;

c.) den mindestens notwendigen Reibwert μ_B zwischen Stütze und Boden;

d.) den mindestens notwendigen Reibwert μ_C zwischen Stütze und Band.



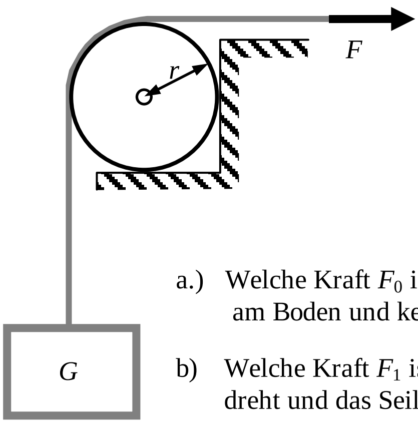
Aufgabe 1-32: Eine Stütze mit einer Rolle ist bei *B* gelenkig an der Wand befestigt und wird durch ein horizontales elastisches Band (von *A* nach *C*) im Winkel $\alpha = 45°$) gehalten. Über ein Seil (Umschlingungswinkel 0.75 π, Reibwert μ) wird ein Gewicht *G* gehalten, demgegenüber seien die Gewichte von Rolle, Stütze und Band vernachlässigbar. Berechnen Sie:



a.) Für eine bei *C* frei drehbare Rolle die Kräfte *F* im Band und *S* in der Stütze.

b.) Für eine blockierte Rolle die mindestens erforderliche Kraft F_{min} im Band.

c.) Den kleinsten Rollenradius *r*, für den noch Gleichgewicht herrscht, wenn bei blockierter Rolle das Band durchgeschnitten wird.



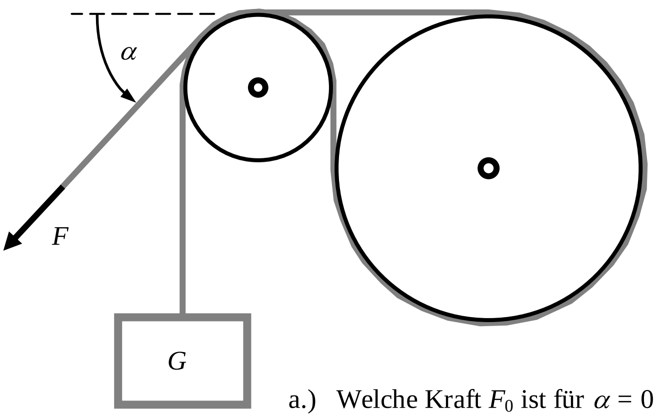
Aufgabe 1-33: Eine Kraft *F* soll ein Gewicht *G* nach oben ziehen. Dieses Gewicht hängt wie skizziert an einem über eine Rolle (Radius *r*) geführten Seil (Umschlingungswinkel π/2); wobei die Rolle auf einer Stufe liegt (deren horizontaler Teil sei der „Boden“, ihr vertikaler Teil sei die „Wand“). Der Reibungsbeiwert zwischen Rolle und Stufe sei μ, der Reibungsbeiwert zwischen Seil und Rolle sei μ_{Seil} . Das Gewicht der Rolle sei gegenüber *G* und *F* vernachlässigbar klein.

a.) Welche Kraft F_0 ist mindestens erforderlich um das Gewicht (bei Haftreibung der Rolle am Boden und keinem Rutschen des Seils) ohne Hochziehen im Gleichgewicht zu halten?

b) Welche Kraft F_1 ist erforderlich, wenn sich die Rolle beim langsamen Hochziehen nicht dreht und das Seil auf ihrer Oberfläche rutscht?

c.) Welche Kraft F_2 ist erforderlich, wenn das Seil nicht rutscht und sich die Rolle beim Hochziehen im Uhrzeigersinn dreht (Gleitreibung an Wand und Boden)?

d.) Welcher Reibwert μ zwischen Rolle und Wand ist mindestens erforderlich, damit die Rolle bei langsamen Hochziehen an der Wand hochrollt (Haftreibung an der Wand)?



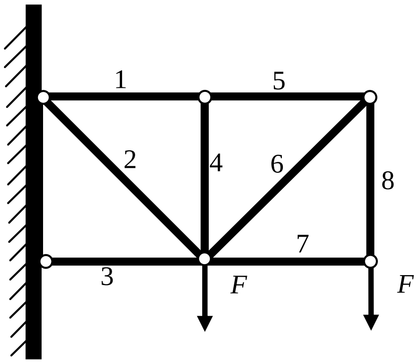
Aufgabe 1-34: Eine Kraft *F* soll ein Gewicht *G* nach oben ziehen. Das Gewicht hängt an einem Seil, welches über eine Rollenführung läuft. Diese besteht aus zwei Rollen, die beide um den Mittelpunkt reibungsfrei drehbar montiert sind (siehe Skizze). Dabei wird das Seil erst mit dem Umschlingungswinkel π über die kleine Rolle gelegt, dann um die große Rolle und schließlich nochmals um die kleine Rolle, diesmal mit dem Umschlingungswinkel α.
Der Seilreibungsbeiwert sei μ.

a.) Welche Kraft F_0 ist für $\alpha = 0$ erforderlich, um *G* im Gleichgewicht zu halten?

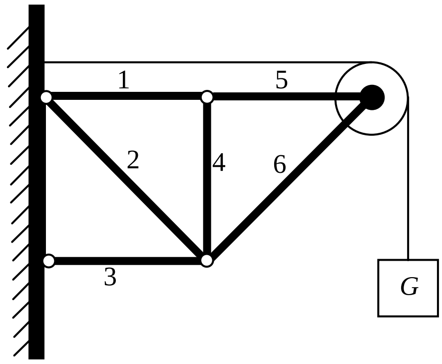
b.) Welche Kraft F_1 ist erforderlich, wenn sich für kleine Umschlingungswinkel α bei langsamen Hochziehen die kleine Rolle im Uhrzeigersinn dreht?

c.) Welche Kraft F_2 ist erforderlich, wenn sich für große Umschlingungswinkel α bei langsamen Hochziehen die kleine Rolle gegen den Uhrzeigersinn dreht?

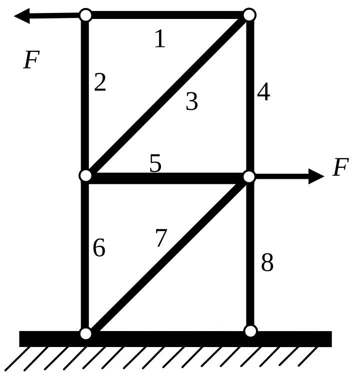
d.) Berechnen Sie für $\mu = 0.5$ den Winkel α , für den die Drehrichtung der kleinen Rolle undefiniert ist.



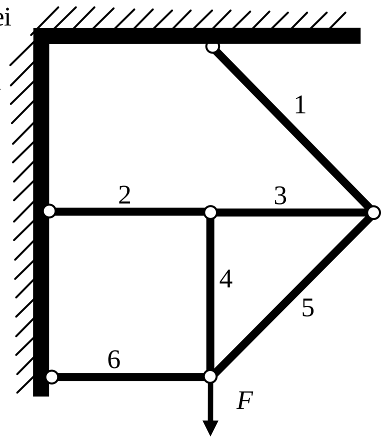
Aufgabe 1-35: Gegeben sei obenstehendes Fachwerk, welches in zwei Knotenpunkten jeweils durch die Kräfte *F* belastet wird (bis auf die Diagonalstäbe 2 und 6 sind alle Stäbe gleichlang). Berechnen Sie die acht Stabkräfte und geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Druckstab oder einen Zugstab handelt.



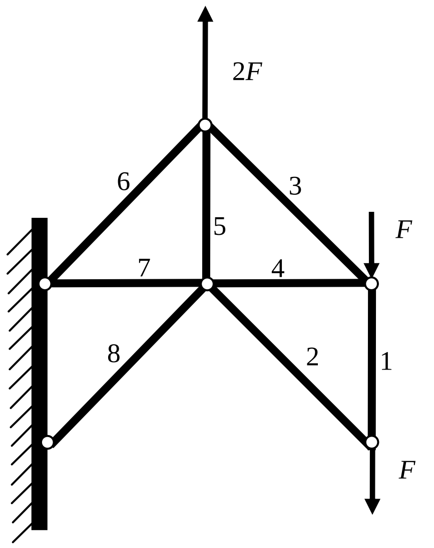
Aufgabe 1-36: Das oben gezeichnete Fachwerk besteht aus 6 Stäben, wobei die Stäbe 1,3,4,5 gleichlang sind. Im Verbindungsknoten ist eine (als gewichtslos und reibungsfrei zu betrachtende) Rolle angebracht, die ein durch das Gewicht *G* belastetes Seil trägt. Ermitteln Sie alle sechs Stabkräfte.



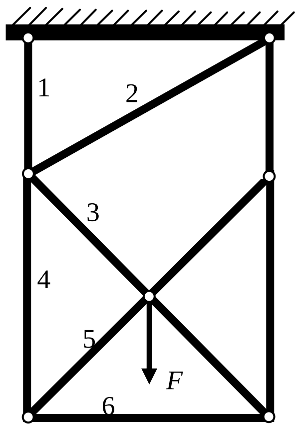
Aufgabe 1-37: Gegeben sei nebenstehendes Fachwerk, welches im unteren Knoten durch die Kraft *F* belastet wird (bis auf die 45° Diagonalstäbe 1 und 5 sind alle Stäbe gleichlang). Berechnen Sie alle sechs Stabkräfte und geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Druckstab oder um einen Zugstab handelt.



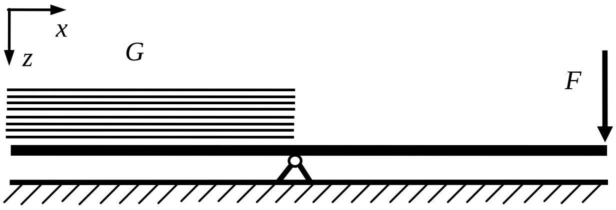
Aufgabe 1-38: Gegeben sei obenstehendes Fachwerk, welches in zwei Knotenpunkten jeweils durch die Kräfte *F* belastet wird (bis auf die Diagonalstäbe 3 und 7 sind alle Stäbe gleichlang). Berechnen Sie die acht Stabkräfte und geben Sie jeweils an (z.B. in Klammern hinter dem Wert), ob es sich um einen Druckstab oder einen Zugstab handelt.

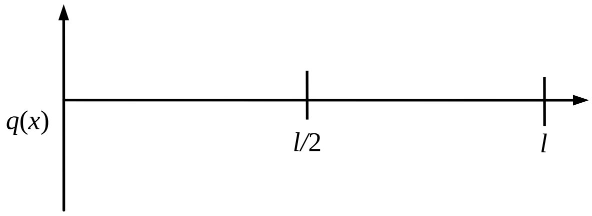


Aufgabe 1-39: Gegeben sei nebenstehendes Fachwerk, das im mittleren Knoten durch die Kraft *F* belastet wird. Berechnen Sie die Stabkräfte 1 bis 6 und geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Druckstab oder um einen Zugstab handelt.

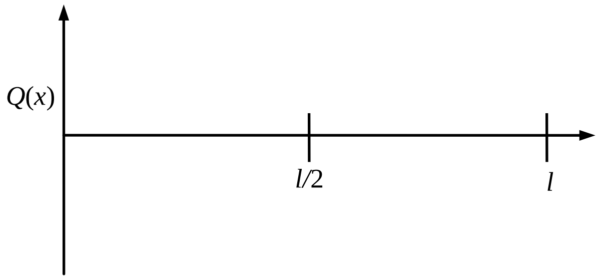


Aufgabe 1-40: Gegeben sei obenstehendes Fachwerk, welches in drei Knotenpunkten durch die Kräfte *F* bzw. 2*F* belastet wird (die Diagonalstäbe sind immer im Winkel 45° angebracht). Berechnen Sie die acht Stabkräfte und geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Druckstab oder einen Zugstab handelt.





Aufgabe 1-41: Ein Papierstapel (Gesamtgewicht *G*) liegt auf einem dünnen Brett (Länge *l*, Gewicht vernachlässigbar), das mittig auf einer Kante liegt und durch die Kraft *F* horizontal gehalten wird.

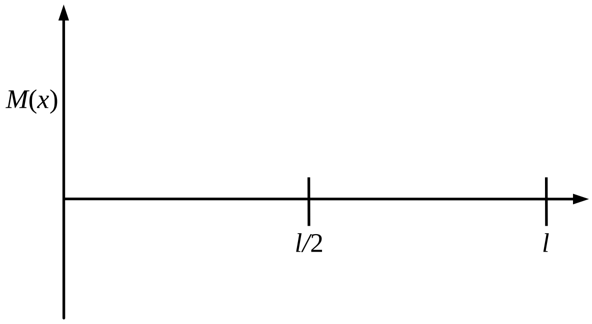


Berechnen Sie *F* in Abhängigkeit von *G* und tragen Sie für das Brett

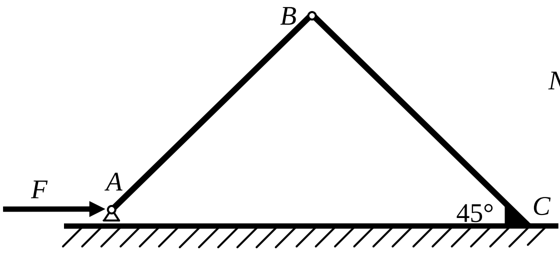
a.) die Belastungskurve q(*x*)

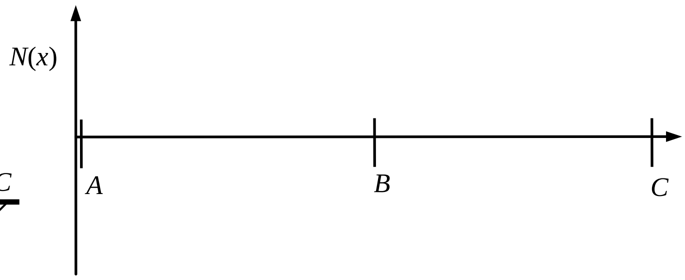
b.) die Querkraftkurve *Q*(*x*)

c.) die Momentenkurve *M*(*x*)

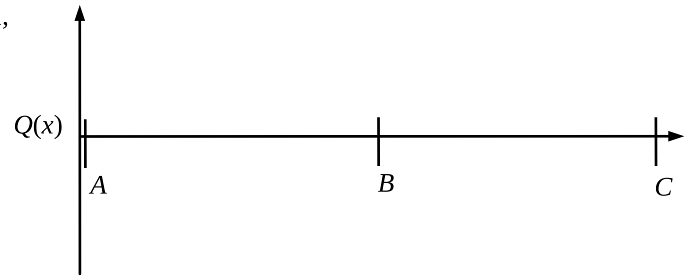


in nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.





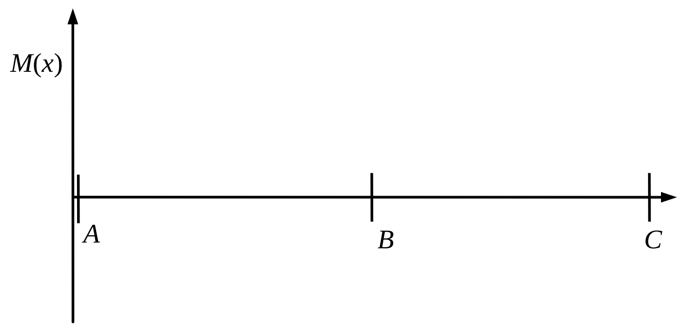
Aufgabe 1-42: Ein Balken (Gesamtlänge 2*l*) ist mittig bei *B* mit einem Drehgelenk versehen, am linken Ende bei *A* durch ein verschiebbares Gelenklager und bei *C* im Winkel von 45° durch eine feste Einspannung mit dem Boden verbunden. Nun wird er bei *A* durch eine externe Horizontalkraft *F* belastet. Tragen Sie



a.) den Normalkraftverlauf *N*(*x*)

b.) den Querkraftverlauf *Q*(*x*)

c.) und den Momentenverlauf *M*(*x*)



in die nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an. (Die Koordinate *x* läuft dabei im Balken von *A* über *B* nach *C*, die Koordinate *z* zeigt rechtwinklig zu *x* nach unten.)

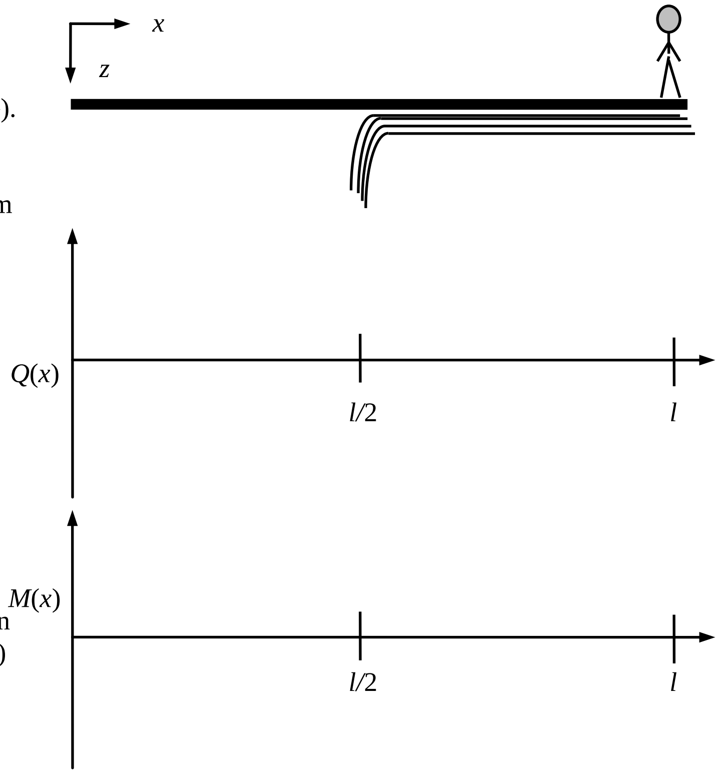
Aufgabe 1-43: Ein Flößer (Gewicht G) steht genau am Ende eines im Wasser treibenden Baumstammes (Länge l, Gewicht ebenfalls G). Leider treibt es (wie das Leben nun mal so spielt) Baumstamm und Flößer auf einen Wasserfall zu. Wir betrachten im Baumstamm den Belastungsverlauf $q(x)$ (durch Eigengewicht, Wasserauftrieb und Flößer) und die sich daraus ergebenden Kurven und Werte:

a.) die Querkraftkurve $Q(x)$

b.) die Momentenkurve $M(x)$

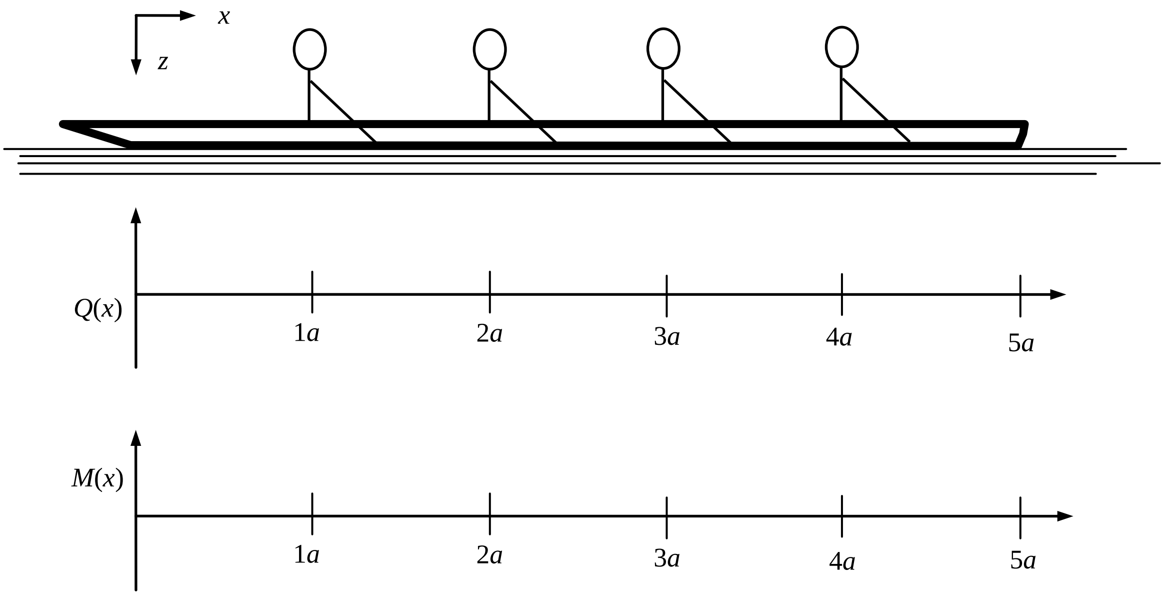
c.) das maximale Biegemoment M_{max}.

genau in dem Moment, als der Baumstamm schon halb in der Luft liegt und halb noch (waagrecht) im Wasser schwimmt. (Was dann passiert, wollen wir lieber nicht untersuchen.) Zeichnen Sie die zwei Kurven in die nebenstehende Skizze ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.

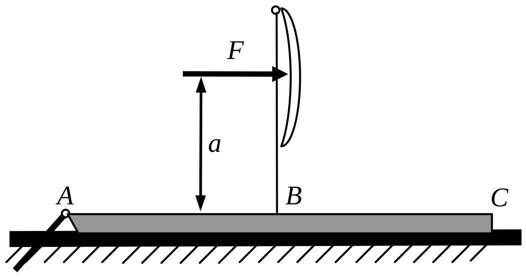


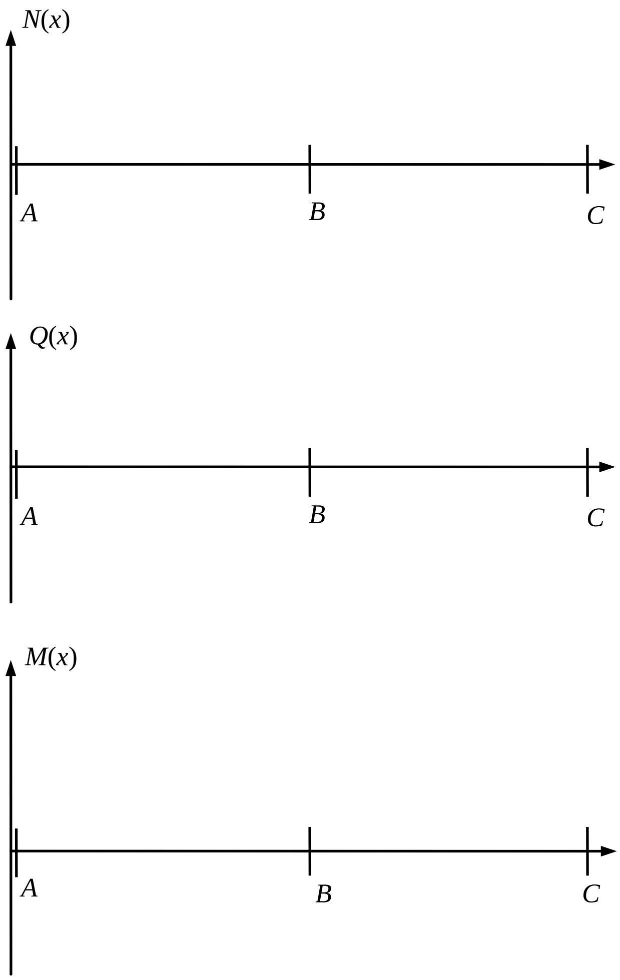
Aufgabe 1-44: Für ein mit 4 Ruderern (jeweils Gewicht G) gleichmäßig besetztes Boot (Länge $5a$) betrachten wir den Belastungsverlauf $q(x)$ durch Eigengewicht, Wasserauftrieb und Ruderer.

a.) Zeichen Sie die sich daraus ergebende Querkraftkurve $Q(x)$ und die Momentenkurve $M(x)$ in die unten stehenden Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.



b.) Nun fällt wegen totaler Erschöpfung der Ruderer 2 (an der Stelle $2a$) ins Wasser.
An welche Stelle x muss sich Ruderer 1 begeben, damit das Boot weiterhin im Gleichgewicht bleibt? (Ruderer 3 und 4 bleiben vor Schreck auf ihren Plätzen)





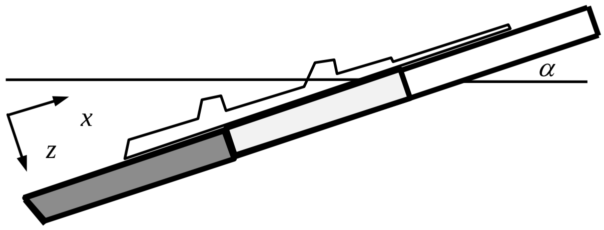
Aufgabe 1-45: Ein Segelboot (Gesamtlänge $2a$, von A nach C) soll als langer, gerader, im Wasser liegender Balken betrachtet werden. Es wird bei A durch eine Ankerkette festgehalten, die genau im Winkel von 45° zur Wasseroberfläche steht.
Mittig bei B steht der Mast, der ein Segel trägt. Der Abstand der Wirkungslinie der horizontalen Windkraft F zum Bootskörper sei ebenfalls a.
Das andere Ende C des Bootes sei frei.
Tragen Sie

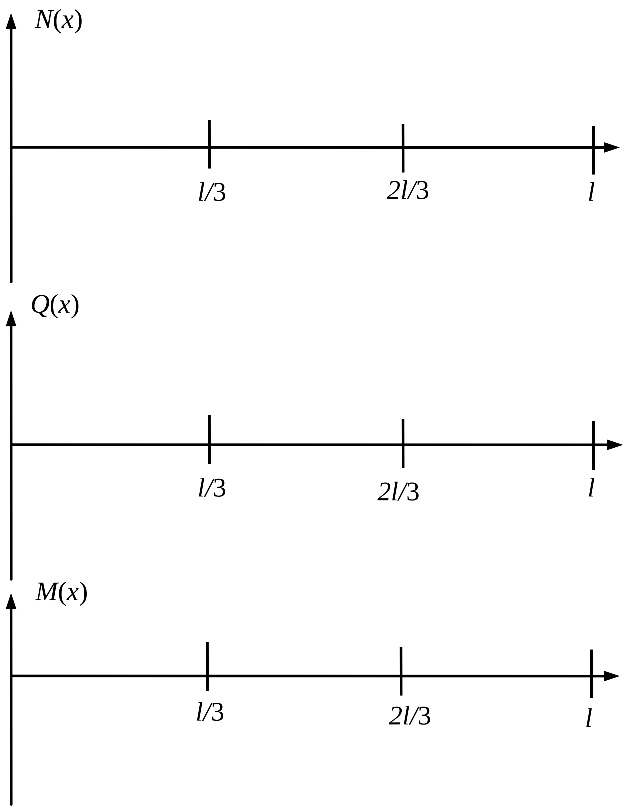
a.) den Normalkraftverlauf $N(x)$

b.) den Querkraftverlauf $Q(x)$

c.) und den Momentenverlauf $M(x)$

in die nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.
(Die Koordinate x läuft dabei im Boot von A über B nach C, die Koordinate z zeigt rechtwinklig zu x nach unten.)





Aufgabe 1-46: Ein Transatlantik-Dampfer (Länge l, Gewicht G homogen über die Länge verteilt) ist in der Nähe von Neufundland aus Versehen mit einem Eisberg kollidiert und sinkt nun (soll vorkommen). Wir betrachten den Moment, wo nur noch das hintere Drittel des Schiffes aus dem Wasser ragt (Winkel $\alpha = 30°$). Das vordere Drittel ist schon vollständig mit Wasser vollgelaufen. Lediglich das mittlere Drittel trägt noch mit Luft zum Auftrieb bei (Auftrieb G, längenspezifisch konstant). Tragen Sie

a.) die Normalkraftkurve $N(x)$
b.) die Querkraftkurve $Q(x)$
c.) die Momentenkurve $M(x)$

in nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.

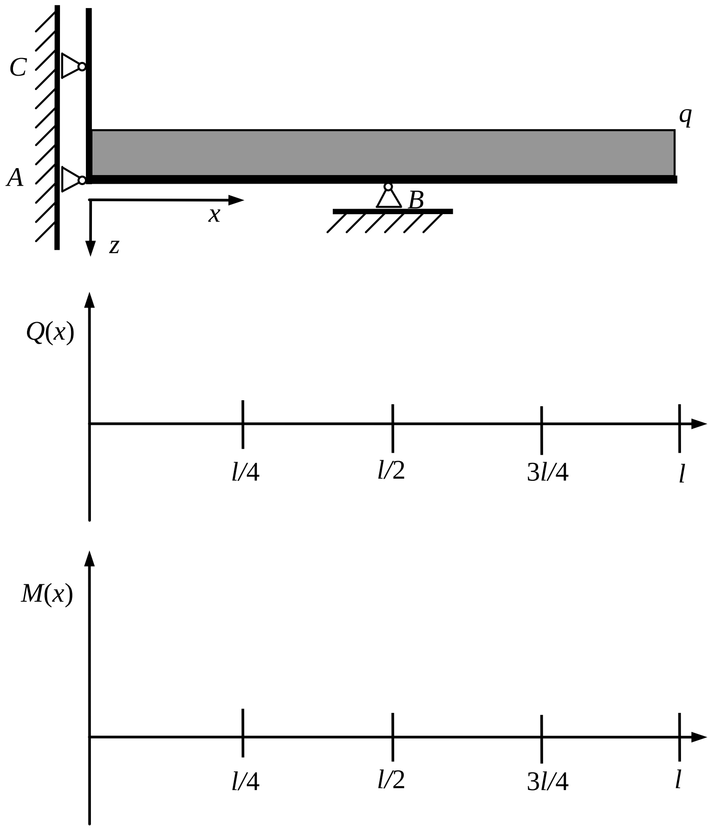
Aufgabe 1-47: Ein horizontaler Balken (Länge l) ist mit einem am linken Ende senkrecht nach oben zeigenden Teilstück fest verbunden und wird durch drei einwertige Lager (A , B und C) statisch bestimmt gelagert. Lager B hat den Abstand x vom linken Balkenende.
Der Balken wird durch eine konstante längenspezifische Last q belastet.
Tragen Sie für $x = l/2$

a.) die Querkraftkurve $Q(x)$

b.) die Momentenkurve $M(x)$

in nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.

c.) Für welchen Wert x (Abstand des Lagers B) wird der absolute Maximalwert der im Balken auftretenden Biegemoment-Beanspruchung minimal?

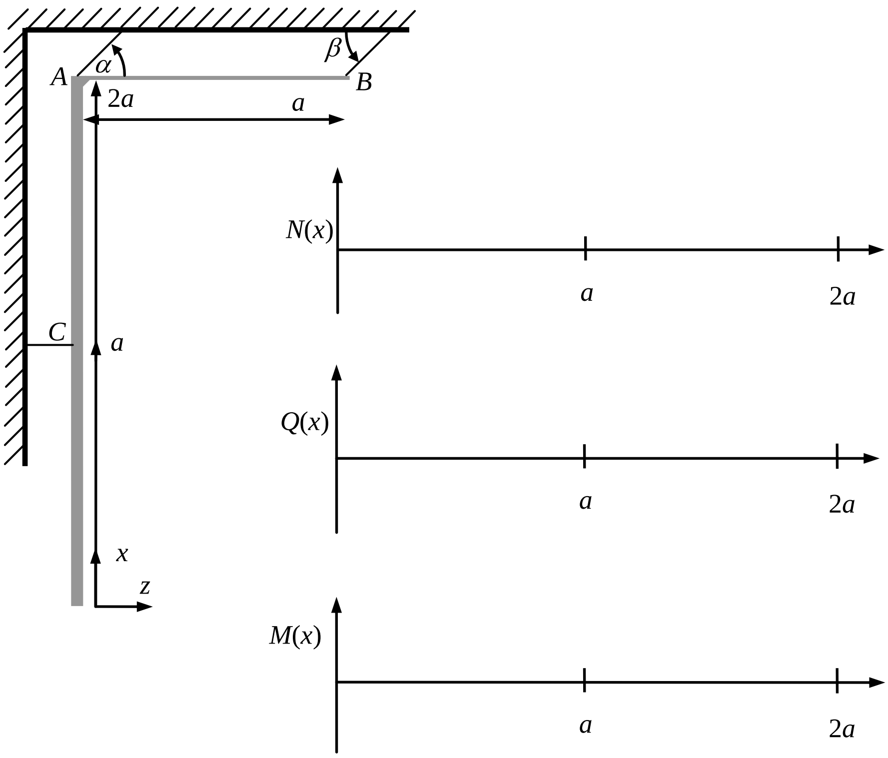


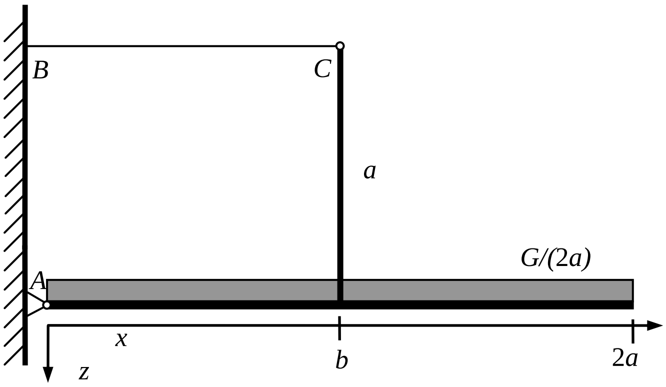
Aufgabe 1-48: Ein langer homogener Balken (Länge $2a$, Gewicht G), bei welchem am oberen Ende im rechten Winkel ein Querbalken (Länge a, Gewicht vernachlässigbar) angebracht worden ist, wird oben bei A und B durch zwei schräg verlaufende Seile ($\alpha = 45°$, $\beta = 45°$) und mittig bei C durch ein horizontales Seil statisch bestimmt gelagert.

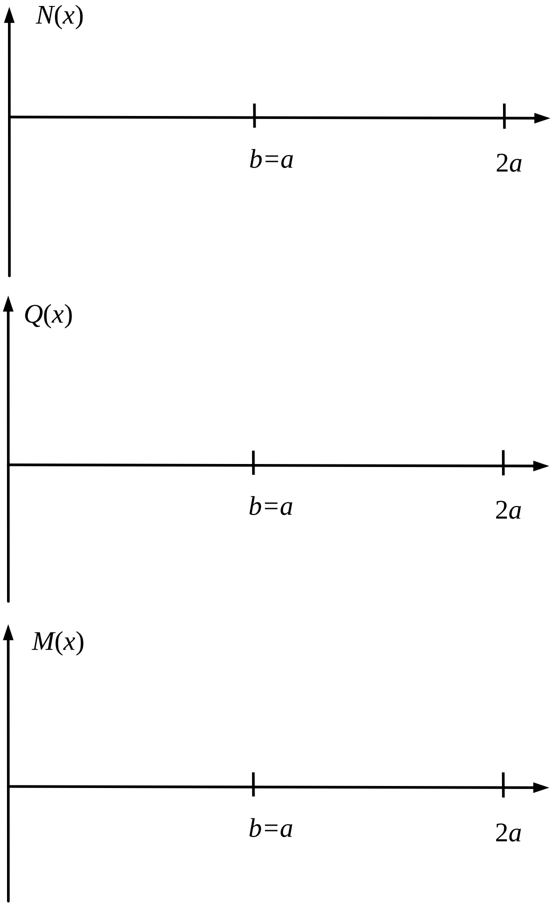
a.) Berechnen Sie die drei Seilkräfte.

b.) Tragen Sie die Verläufe von Normalkraft $N(x)$, Querkraft $Q(x)$ und Biegemoment $M(x)$ für den vertikalen Teil des Balkens in die nebenstehenden Skizzen ein und geben Sie die Eckwerte an.

c.) Für welchen Seilwinkel α wird die Balkenlagerung statisch unbestimmt?



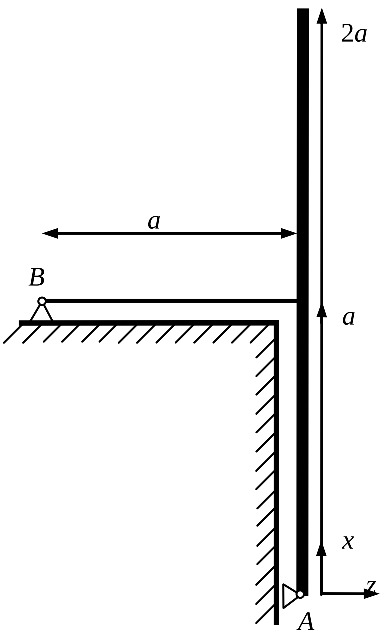


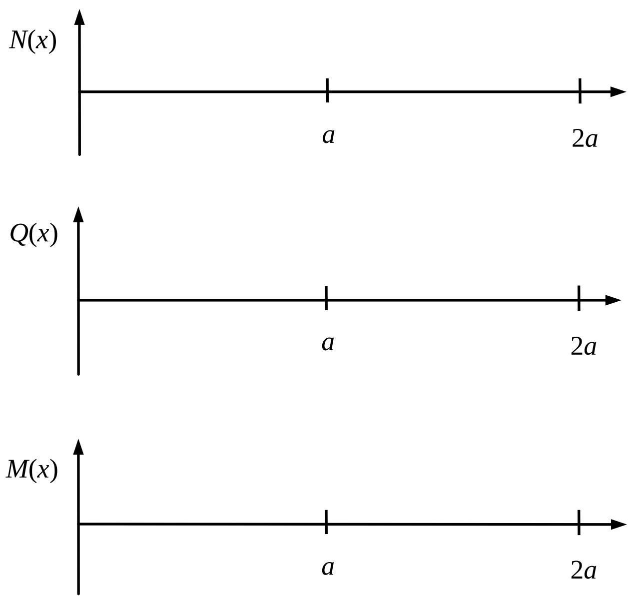


Aufgabe 1-49: Ein horizontaler Tragbalken (Länge $2a$) wird durch die konstante längenspezifische Last $G/(2a)$ belastet. Er ist am linken Ende durch ein festes Gelenklager A an einer senkrechten Wand befestigt und wird durch ein horizontales Seil (von B nach C) horizontal gehalten, welches an einem vertikal nach oben zeigenden Teilstück des Balkens befestigt ist. Das vertikale Teilstück des Balkens hat die Länge a und den Abstand b vom linken Balkenende.

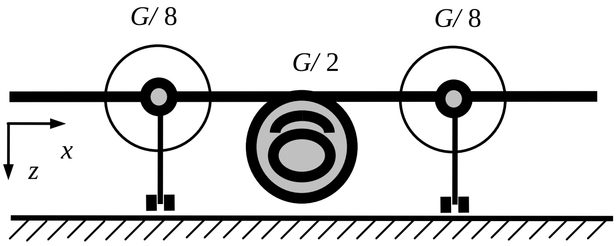
a.) Tragen Sie für $b = a$ für das horizontalen Teilstück des Balkens Normalkraftkurve $N(x)$, Querkraftkurve $Q(x)$ und Momentenkurve $M(x)$ in nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Eckwerte an.

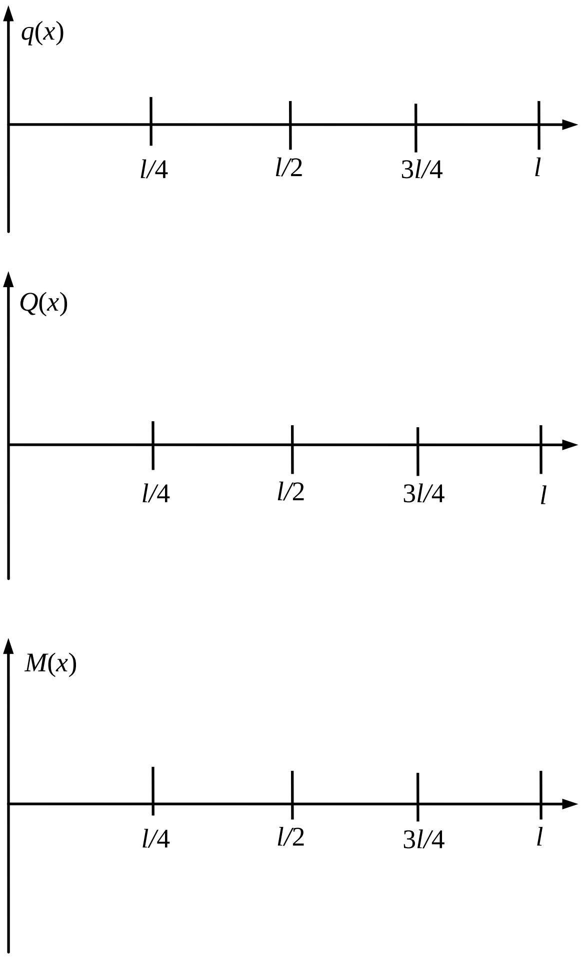
b.) Für welchen Wert b (Abstand des vertikalen Teils) wird der absolute Maximalwert der im Balken auftretenden Biegemoment-Beanspruchung minimal?





Aufgabe 1-50: Ein langer homogener Balken (Gewicht G, Länge $2a$) wird unten bei A durch ein verschiebbares Gelenklager und mittig bei B durch ein festes Gelenklager (über einen im rechten Winkel angebrachten, als gewichtslos zu betrachtenden Querbalken der Länge a) gelagert. Tragen Sie Normalkraftverlauf $N(x)$, Querkraftverlauf $Q(x)$ und Momentenverlauf $M(x)$ für den vertikalen Teil des Balkens in die nebenstehenden Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.





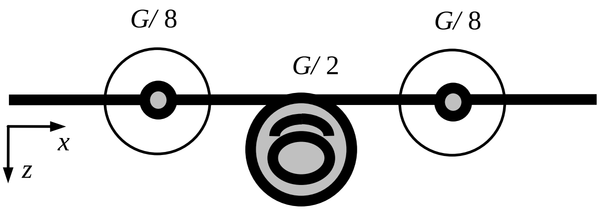
Aufgabe 1-51: Ein Flugzeug (Spannweite *l*, Gesamt-Gewicht *G*) steht kurz vor dem Start auf zwei in den Motorgondeln angebrachten Hauptfahrwerksbeinen (Motor und Bein Gewicht jeweils *G*/8, in Flügelmitte). Die Flügel wiegen also *G*/4, ihr Gewicht wird bei dieser vereinfachten Betrachtung als über die Länge konstant verteilte Belastung angesehen. Die Kraft im Bugfahrwerk ist vernachlässigbar klein. Tragen Sie für die Flügel

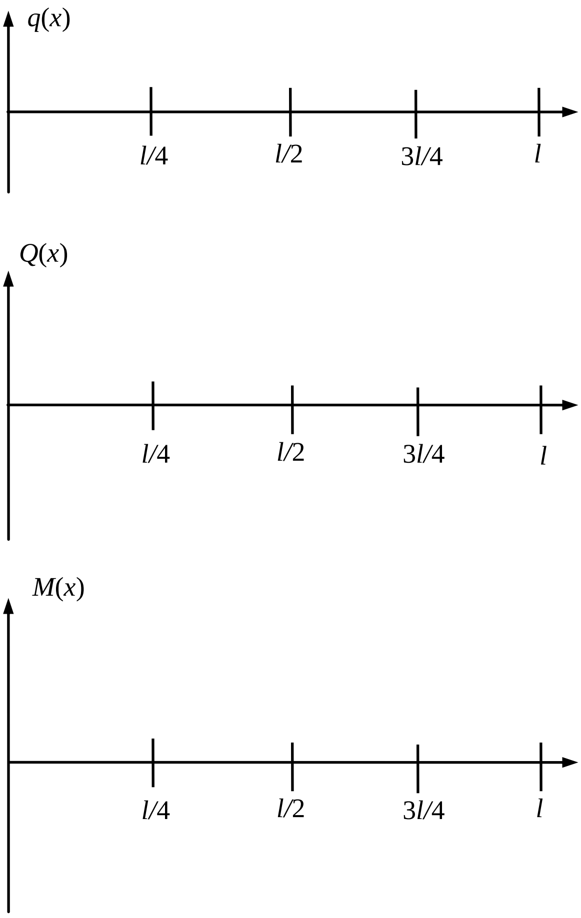
a.) die Belastungskurve q(x)

b.) die Querkraftkurve $Q(x)$

c.) die Momentenkurve $M(x)$

in nebenstehende Skizzen ein und geben Sie





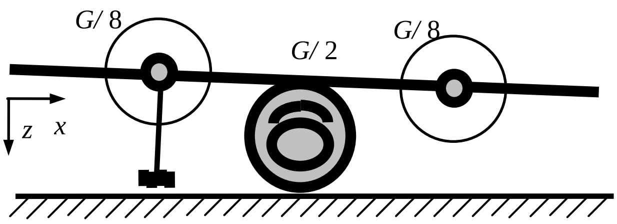
Aufgabe 1-52: Das Flugzeug (Spannweite *l*, Gesamtgewicht *G*), durch zwei Motoren (Gewicht jeweils G/8, in Flügelmitte) angetrieben, befindet sich im stationären Horizontalflug (die Flügel wiegen zusammen *G*/4, längenspezifisch konstantes Gewicht). Der Auftrieb ist also *G*, wird bei dieser vereinfachten Betrachtung ebenfalls als längenspezifisch konstant angenommen. Tragen Sie für die Flügel

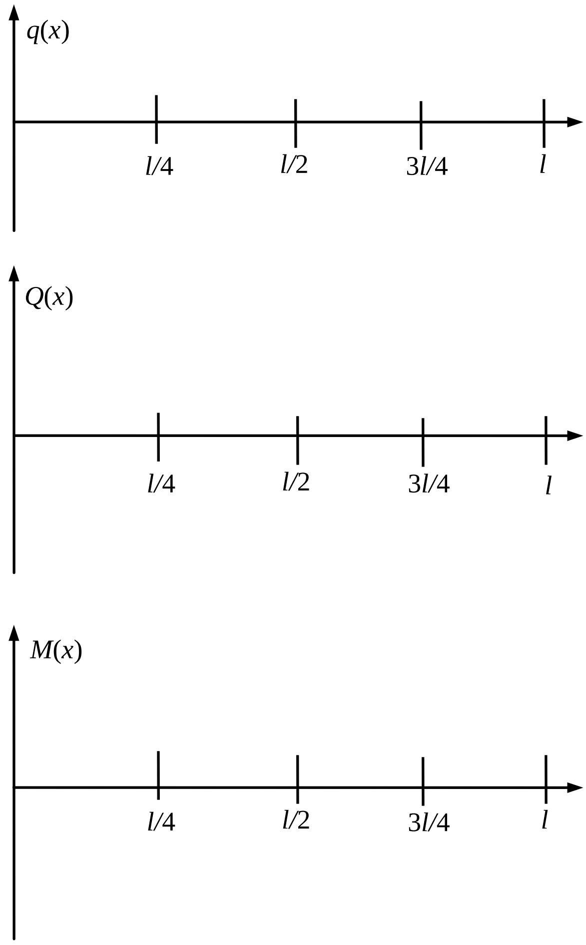
a.) die Belastungskurve q(x)

b.) die Querkraftkurve $Q(x)$

c.) die Momentenkurve $M(x)$

in nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Eckwerte (bzw. Eckwerte) an.





Aufgabe 1-53: Der Pilot des zweimotorigen Flugzeuges (Spannweite l, Gesamtgewicht G, Motorengewicht jeweils $G/8$) hat eine Bruchlandung verursacht, bei der das Bugfahrwerk und das linke Hauptfahrwerk abgebrochen sind. Nach der Landung liegt das Flugzeug bäuchlings auf dem Rumpf etwas schief (die Neigung ist aber vernachlässigbar klein). Die Flügel wiegen $G/4$, ihr Gewicht wird bei dieser vereinfachten Betrachtung als über die Länge konstant verteilte Belastung angesehen.
Tragen Sie für die Flügel

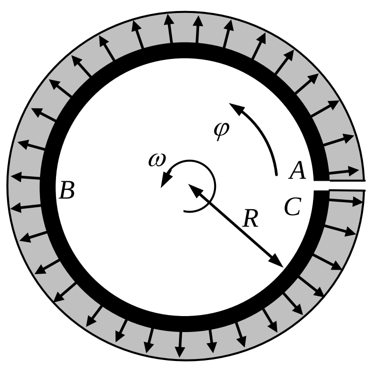
a.) die Belastungskurve $q(x)$

b.) die Querkraftkurve $Q(x)$

c.) die Momentenkurve $M(x)$

in nebenstehende Skizzen ein und geben Sie die Extremwerte (bzw. Eckwerte) an.

Aufgabe 1-54: Eine ringförmige Raumstation (Radius R) rotiert um die eigene Achse, um für die Besatzung „künstliche Schwerkraft“ zu erzeugen. Die auf die Station wirkenden Fliehkräfte können dabei als konstante längenspezifische Querkraftbelastung q für den „ringförmigen Balken“ betrachtet werden.



Nun wird durch Sabotage die Raumstation zwischen A und C aufgesprengt (wer das nicht glaubt, der sah noch nicht genügend Science-Fiction Filme...).

a.) Berechnen Sie im Punkt B (bei $\varphi = 180°$) die inneren Schnittgrößen Q, N und M (Querkraft, Normalkraft und Moment).

b.) Skizzieren Sie qualitativ über die Koordinate $R\varphi$

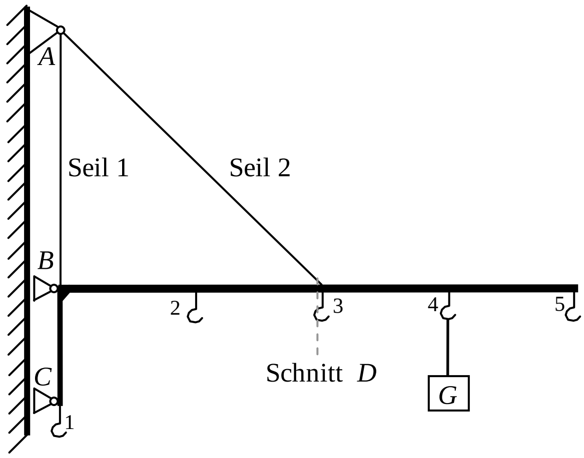
- den Normalkraftverlauf $N(\varphi)$
- den Querkraftverlauf $Q(\varphi)$
- und den Momentenverlauf $M(\varphi)$

(Die Vorzeichenregelung kann ignoriert werden)

Aufgabe 1-55: Gegeben sei ein L-förmiger starrer Balken, der an seinem linken Ende bei B und C durch zwei einwertige Lager (verschiebbare Gelenklager) an der vertikalen Wand befestigt ist. Der Balken wird durch die Lager stets exakt horizontal gehalten.

Er wird durch zwei straffe Seile (Seil 1 vertikal im linken Ende, Seil 2 in Balkenmitte im Winkel 45°) in seiner Höhe gehalten, dabei sind beide Seile bei A fest eingespannt (siehe Skizze).

Unten am Balken sind fünf Haken angebracht, und zwar im gleichen horizontalen Abstand voneinander über die ganze Länge verteilt. Nun wird an Haken 4 das Gewicht G gehängt (das Eigengewicht des Balkens sei dagegen vernachlässigbar). Schnitt D befindet sich unmittelbar links der Balkenmitte neben der Seilbefestigung und dem Haken 3.



Tragen Sie in die Klammern ein, welche der folgenden Aussagen richtig ***r*** und welche falsch ***f*** sind:

a.) ( ) Der Balken ist statisch unbestimmt gelagert.

b.) ( ) Wenn das Gewicht G an den Haken 1 gehängt wird, so ist das Seil 2 spannungsfrei.

c.) ( ) Beide Seilkräfte ändern sich nicht, wenn G statt an den Haken 4 an den Haken 5 gehängt wird.

d.) ( ) Wird G an den Haken 2 gehängt, so sind die Vertikalkomponenten der beiden Seilkräfte gleich.

e.) ( ) Wenn G durch drei geteilt wird und als $G/3$ auf die Haken 3, 4 und 5 aufgehängt wird, so ändert das die Lagerreaktionen in den Lagern A, B und C nicht.

f.) ( ) Die vertikale Lagerreaktion im Lager A ist genau G.

g.) ( ) Die Kräfte in den Seilen 1 und 2 sind gleich, weil das Verhältnis $\Delta L/L$ (Längung zu Länge) für beide Seile gleich ist.

h.) ( ) Wenn das Seil 2 durchgeschnitten wird, so ändert das nichts am Biegemoment im Schnitt D.

i.) ( ) Wenn das Seil 2 durchgeschnitten wird, so verschwindet die Normalkraft im Schnitt D.

j.) ( ) Wenn das Seil 1 durchgeschnitten wird, so ändert das nichts am Biegemoment im Schnitt D.

k.) ( ) Wenn das Seil 1 durchgeschnitten wird, so ist die Kraft im Seil 2 genau $\sqrt{2}\,G$.

l.) ( ) Wenn das Seil 1 durchgeschnitten wird, so verschwindet die Querkraft im Schnitt D.

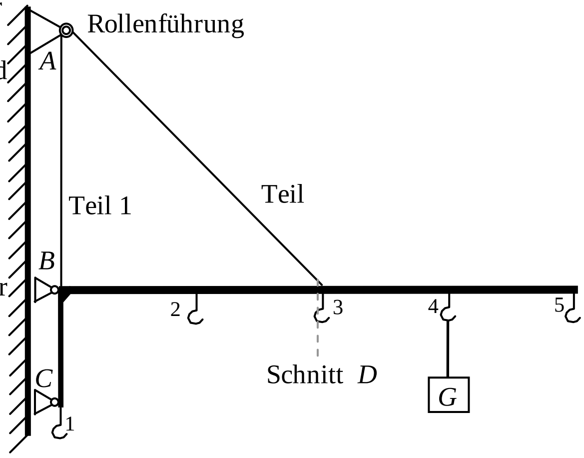
m.) ( ) Es macht für die Querkraft im Schnitt D keinen Unterschied, ob das Seil 1 oder das Seil 2 durchgeschnitten wird.

n.) ( ) Es macht für das Biegemoment im Schnitt D keinen Unterschied, ob das Seil 1 oder das Seil durchgeschnitten wird.

o.) ( ) Wenn die feste Einspannung der beiden Seile bei A durch eine Umlenkrolle ersetzt wird, so ändern sich die Lagerreaktionen bei B und C nicht.

p.) ( ) Die Kraft im Lager B wächst an, wenn das Lager C entfernt wird.

Aufgabe 1-56: Gegeben sei wiederum jener L-förmige Balken aus Aufgabe 1-55, welcher an seinem linken Ende bei *B* und *C* durch zwei verschiebbare Gelenklager an der vertikalen Wand befestigt ist und durch diese Lager stets exakt horizontal gehalten wird. Diesmal wird er durch nur ein Seil (linkes „vertikales Ende" Teil 1, rechtes „schräges Ende" Teil 2, befestigt in Balkenmitte im Winkel 45°) in seiner Höhe gehalten, dabei wird das Seil bei *A* über eine reibungsfrei drehbare Rolle geführt.



Wiederum sind unten am Balken sind fünf Haken angebracht (im gleichen horizontalen Abstand voneinander über die ganze Länge verteilt); am Haken 4 hängt das Gewicht *G* (das Balkengewicht sei vernachlässigbar). Schnitt *D* befindet sich unmittelbar links der Balkenmitte neben der Seilbefestigung und dem Haken 3.

Tragen Sie in die Klammern ein, welche der folgenden Aussagen richtig ***r*** und welche falsch ***f*** sind:

a.) ( ) Der Balken ist statisch unbestimmt gelagert.

b.) ( ) Wenn *G* statt an den Haken 4 an den Haken 1 gehängt wird, so ist Teil 2 des Seiles spannungsfrei.

c.) ( ) Wenn *G* statt an den Haken 4 an den Haken 5 gehängt wird, so ändern sich die Kräfte im Seil nicht.

d.) ( ) Wenn *G* an den Haken 5 gehängt wird, so ändern sich die Kräfte in den Lagern *B* und *C* nicht.

e.) ( ) Wird *G* statt an den Haken 4 an den Haken 2 gehängt, so sind die Vertikalkomponenten der Kräfte in den Seilenden (Teil 1 und Teil 2) gleich.

f.) ( ) Wenn *G* (statt an den Haken 4 gehängt) durch drei geteilt wird und als *G*/3 auf die Haken 3, 4 und 5 aufgehängt wird, so ändert das die Lagerreaktionen in den Lagern *A*, *B* und *C* nicht.

g.) ( ) Die vertikale Lagerreaktion im Lager *A* ist genau *G*.

h.) ( ) Die Kräfte in den beiden Seilenden (Teil 1 und Teil 2) sind gleich.

i.) ( ) Die Normalkraft im Schnitt *D* ist $\sqrt{2}$ mal *G*.

j.) ( ) Im vertikalen Teil des Balkens (vom Lager *C* zum Lager *B*) ist der Querkraftverlauf konstant (rechteckige Querkraftfläche) und der Biegemomentenverlauf linear ansteigend (dreieckige Momentenfläche).

k.) ( ) Im vertikalen Teil des Balkens (zwischen den Lagern *B* und *C*) verschwindet die Normalkraft.

l.) ( ) Wird der Abstand des Lagers *C* vom Lager *B* auf die Hälfte verkürzt, so verdoppelt sich die Kraft im Lager *C*.

m.) ( ) Wird das Seil verkürzt sodass der Befestigungswinkel in Balkenmitte nicht mehr 45° sondern z.B. nur noch 40° beträgt, so wird das Seil aber auch stärker belastet als vorher.

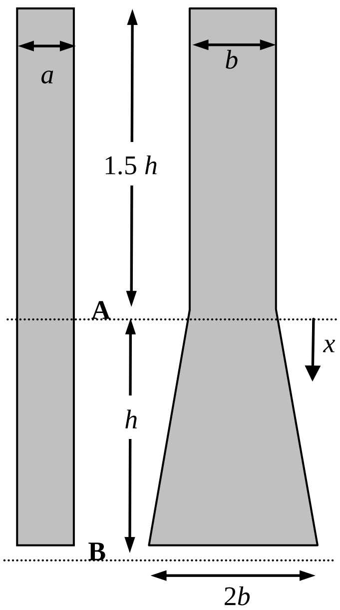
n.) ( ) Wenn das Seilende Teil 2 statt mittig am Haken 3 weiter links am Haken 2 befestigt wird (Gewicht hängt weiterhin am Haken 4), so ändert das nichts am Biegemoment im Schnitt *D*.

o.) ( ) Wenn das Seilende Teil 2 statt mittig am Haken 3 weiter rechts am Haken 4 befestigt wird (*G* hängt auch an 4), so ändert das nichts am Biegemoment im Schnitt *D*.

p.) ( ) Wenn das Seilende Teil 2 statt mittig am Haken 3 weiter rechts am Haken 4 befestigt wird, so tritt im gesamten Balken überhaupt keine Biegebeanspruchung auf.

q.) ( ) Die Belastungsverläufe im horizontalen Teil des Balkens bleiben exakt die gleichen, wenn das Lager *C* entfernt wird und das verschiebbare Gelenklager *B* durch ein festes Gelenklager ersetzt wird.

Übungsaufgaben zum Kapitel 2 (Elastostatik):

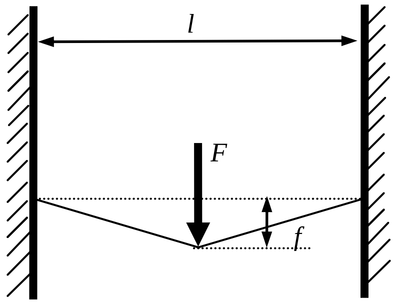


Aufgabe 2-1: Ein Bauteil mit rechteckigem Querschnitt (homogenes Material der Dichte ρ) hat die Gesamthöhe 2.5 h und die konstante Tiefe a. Im unteren Abschnitt verringert sich die Breite linear mit der Höhe von $2b$ zu b, im oberen Abschnitt bleibt sie konstant b.

a.) Berechnen Sie die Spannungen in den Querschnitten **A** und **B**.

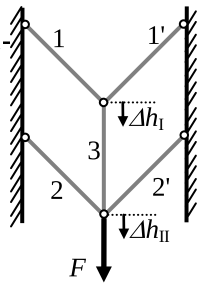
b.) Berechnen Sie $\sigma(x)$?

c.) An welcher Stelle x nimmt die Normalspannung $\sigma(x)$ einen Extremwert an?



Aufgabe 2-2: Ein langes Seil (Länge l , Dehnsteifigkeit EA) sei zwischen zwei festen Wänden eingespannt (Vorspannkraft $S_0 \approx 0$) und wird mittig durch eine Kraft F belastet. Berechnen Sie die Kraft S im Seil und die Absenkung f als Funktion der Kraft F.

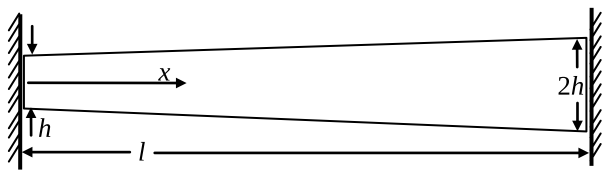
Aufgabe 2-3: Wenn das nebenstehende (statisch unbestimmte) Fachwerk aus fünf gleich-langen Stäben durch die Kraft F belastet wird, treten im Vertikalstab 3 die Zugkraft S_3 und in den 45° schräg liegenden Stäben 1, 1' die Kraft S_1 bzw. in 2, 2' die Kraft S_2 auf. Dabei senken sich die mittig liegenden Knoten I und II um Δh_{I} bzw um Δh_{II} ab.



a.) Geben Sie die Längenänderungen Δl_1 , Δl_2 und Δl_3 der Stäbe 1,2 und 3 als Funktion (sehr kleiner!) Knoten-Absenkungen Δh_{I} und Δh_{II} an.
b.) Geben Sie die Kräftegleichgewichtsbedingungen für die Knoten I und II an.
c.) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 , S_2 und S_3 .

Aufgabe 2-4: Ein Stab mit rechteckigem Querschnitt (Länge l, konstante Breite b), dessen Höhe $h(x)$ linear mit der Länge von anfänglich h auf den doppelten Wert $2h$ anwächst, ist kräftefrei zwischen zwei Wände (mit konstantem Abstand l) eingepasst (siehe Skizze). Wird der Stab jedoch um ΔT erhitzt (Emodul E, Temperaturausdehnungskoeffizient α), so treten in ihm Spannungen auf.

a.) Geben Sie die Stabquerschnittsfläche $A(x)$ an.
b.) Berechnen Sie die Druckkraft N im Stab.
c.) Berechnen Sie den Ort x der maximalen Verschiebung der Querschnittsflächen (gegenüber ihren nicht erhitzten Lagen).

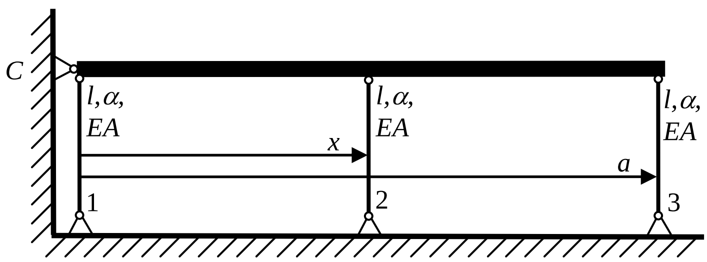


Aufgabe 2-5: Ein starrer Balken (Länge a, Gewicht vernachlässigbar) sei durch drei gleichartige vertikale Stäbe (Länge jeweils l, Temperaturausdehnungskoeffizient α, Dehnsteifigkeit EA) statisch unbestimmt gelagert. Der Abstand des mittleren Stützstabes vom linken Balkenende sei x. Bei der Montage waren die Stützstäbe spannungsfrei, dann jedoch wird die Umgebungstemperatur um ΔT erhöht, und in den Stützstäben treten nun die Kräfte S_1, S_2 und S_3 auf. Berechnen Sie:

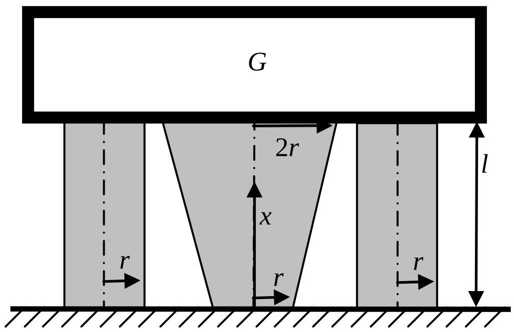
a.) Die Kraft S_1 im Stab 1.

b.) Für $x = a/2$ die Kräfte S_2 und S_3 in den Stäben 2 und 3. Geben Sie an, ob Druck oder Zug auftritt.

c.) Den Wert x, für den die Kraft S_3 (bzw. die Längenänderung des Stabes 3) einen maximalen Wert annimmt.

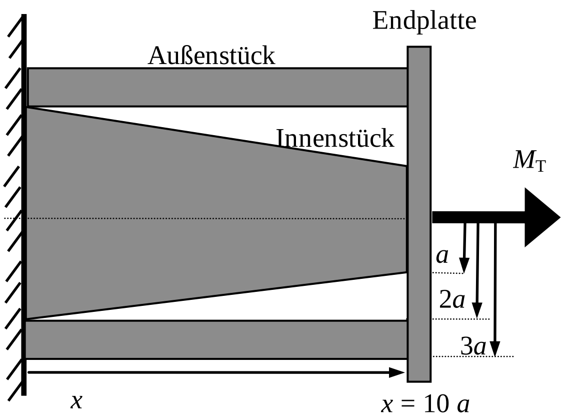


Aufgabe 2-6: Ein starres Gebäude (Gewicht G) steht auf fünf vertikalen Stützen (ursprüngliche, unbelastete Länge l, Emodul E, Eigengewicht gegenüber G vernachlässigbar). Die vier äußeren Stützen seien zylinderförmig (Radius r), eine mittlere Stütze sei kegelstumpfförmig ($r(0) = r$, $r(l) = 2r$). Durch das Gewicht G werden die Stützen um Δl zusammengedrückt. Ermitteln Sie:



a.) Den Ort der maximalen Normalspannung in den Stützen.
b.) Die Kraft F_1 in den zylinderförmigen Stützen als Funktion von Δl.
c.) Die Kraft F_2 in der kegelstumpfförmigen Stütze als Funktion von Δl.
d.) Die Kräfte F_1 und F_2 als Funktion von G.
e.) Den Ort x der maximalen vertikalen Verschiebung von Elementen der mittleren Stütze gegenüber Elementen der äußeren Stützen.

Aufgabe 2-7: Eine Torsionsfeder besteht aus einem hohlzylinderförmigen Außenstück (Länge 10 a, Innenradius $2a$, Außenradius $3a$, Schubmodul G) und einem kegelstumpfförmigen Innenstück (kleiner Radius a, größter Radius $2a$) aus demselben Material. Nun wird über eine starre Endplatte ein Torsionsmoment eingeleitet.



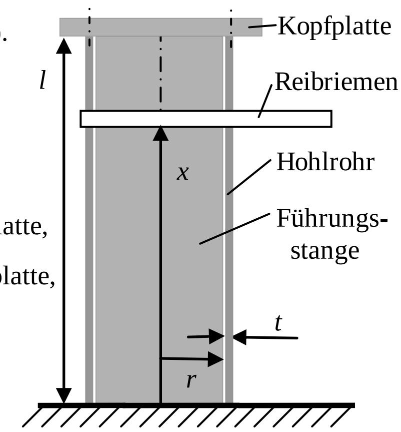
a.) Berechnen Sie den Torsionswinkel φ_1 für den Fall, dass die Endplatte ausschließlich an dem Außenstück befestigt ist und die Feder mit dem Moment M_1 belastet wird (d.h. dass das Innenstück unbelastet ist).

b.) Berechnen Sie den Torsionswinkel φ_2 (von M_2) für den Fall, dass die Endplatte ausschließlich an dem Innenstück befestigt ist (d.h. dass das Außenstück unbelastet ist).

c.) Berechnen Sie das Verhältnis M_2/M_1 für den Fall, dass die Endplatte an Außenstück und Innenstück befestigt wird.

d.) Berechnen Sie den Ort x der maximalen Drehverschiebung $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ zwischen den beiden Teilstücken der Torsionsfeder.

Aufgabe 2-8: Ein dünnwandiges Hohlrohr (Radius r, Länge l ,Wandstärke t, Torsions-Trägheitsmoment $I_p = 2\pi r^3 t$) ist auf eine vertikale Führungsstange (r, $I_p = \pi r^4/2$) aufgesetzt und kann durch eine starre Kopfplatte mit dieser verbunden werden. Beide Bauteile sind im Boden fest verankert, sie bestehen aus dem gleichen Material (Schubmodul G). Ausreichende Schmierung in dem dünnen Spalt verhindert jegliche Reibung. Durch einen Reibriemen wird an der Stelle x in das Hohlrohr ein Torsionsmoment M_T eingeleitet.
Berechnen Sie:

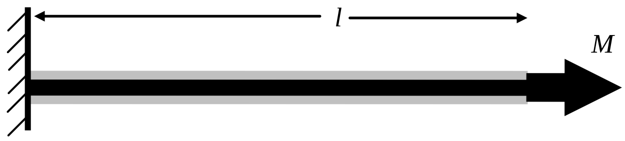


a.) die Verdrehung des Hohlrohres φ an der Stelle x bei gelöster Kopfplatte,

b.) für $x = 0.5\ l$ die Verdrehung φ an der Stelle x bei befestigter Kopfplatte,

c.) den Wert x, für den bei befestigter Kopfplatte die Torsionsschubspannungen τ im Hohlrohr infolge der äußeren Belastung M_T einen minimalen Wert annehmen.

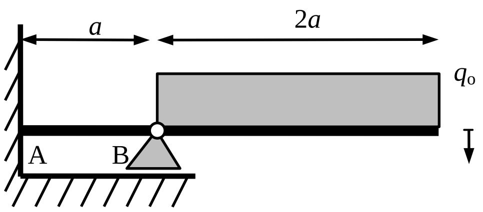
Aufgabe 2-9: Gegeben sei ein isolierter Kupferdraht mit kreisförmigen Querschnitt (Länge l, Radius r_1, Schubmodul G_1), welcher durch ein externes Moment M auf Torsion beansprucht wird. Berechnen Sie unter Vernachlässigung des Einflusses der Isolierung:



a.) die maximale Schubspannung τ und
b.) den Verdrehungswinkel φ.

c.) Wie dick (Radius r_2) muss die Isolierung aus einem Material mit dem Schubmodul $G_2 = 0.1\ G_1$ gemacht werden, damit sich bei gleichem Torsionsmoment der Wert der maximalen Schubspannung gerade halbiert;
d.) und um welchen Faktor verringert sich dabei dann der Verdrehungswinkel?

Aufgabe 2-10: Ein in die Wand (Lagerung A) eingesetzter Tragbalken (Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I, Länge $3a$) ist zusätzlich durch Lagerung B gelagert. Er wird nun wie skizziert durch die spezifische Last q_o belastet.

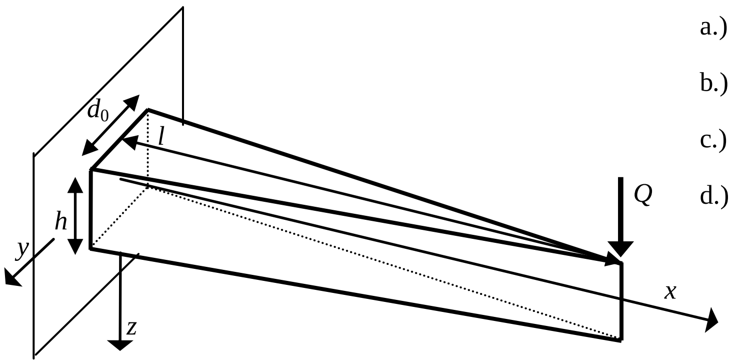


a.) Berechnen Sie die Lagerreaktionen (M_A, F_A, F_B) .

b.) Skizzieren Sie Querkraft und Momentenverlauf.

c.) Berechnen Sie die Durchsenkung f am Balkenende.

Aufgabe 2-11: Ein langer keilförmiger Balken (Länge l , konstante Höhe h, sich linear verringernde Dicke $d(x)$ mit Anfangswert d_0, Elastizitätsmodul E, Gewicht vernachlässigbar) ist links fest eingespannt und rechts mit einer Vertikalkraft Q belastet. Berechnen Sie



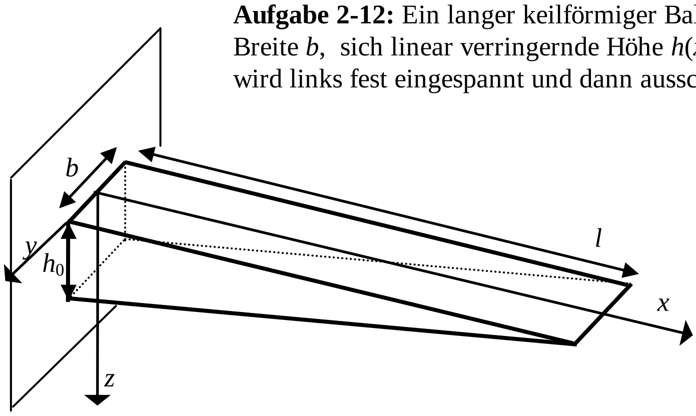
a.) die Momentenbeanspruchung $M(x)$,

b.) das Flächenträgheitsmoment $I_y(x)$,

c.) die Biegelinie $w(x)$ und

d.) die Absenkung des Balkenendes $w(l)$.

Aufgabe 2-12: Ein langer keilförmiger Balken (Materialdichte ρ, Länge l, konstante Breite b, sich linear verringernde Höhe $h(x)$ mit Anfangswert h_0, Elastizitätsmodul E) wird links fest eingespannt und dann ausschließlich durch sein Eigengewicht belastet. Berechnen Sie:



a.) die Querkraftbeanspruchung $Q(x)$,

b.) die Momentenbeanspruchung $M(x)$,

c.) das Flächenträgheitsmoment $I_y(x)$,

d.) die Biegelinie $w(x)$ und

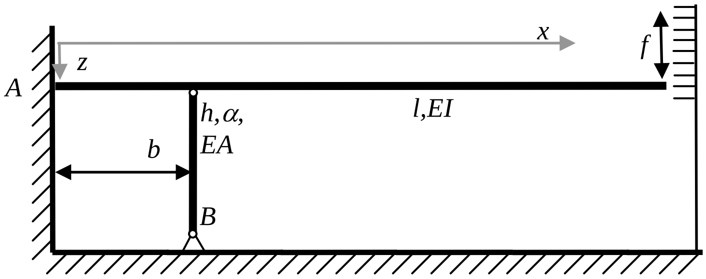
e.) die Absenkung des Balkenendes $w(l)$.

Aufgabe 2-13: Ein Biegebalken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Gewicht vernachlässigbar) soll als Thermometer verwendet werden und ist deshalb links (bei A) fest eingepannt und im horizontalen Abstand b (bei B) durch eine Vertikalstütze (Länge h, Temperaturausdehnungskoeffizient α, Dehnsteifigkeit EA) statisch unbestimmt gelagert. Bei normaler Umgebungstemperatur sei die Stütze spannungsfrei und der Biegebalken gerade. Dann aber wird die Umgebungstemperatur um ΔT erhöht, und in dem Vertikalstab tritt die Kraft N auf.
Berechnen Sie:

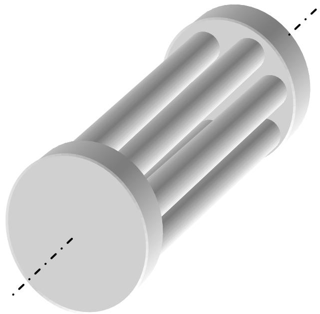
a.) Das Biegemoment $M(x)$ im Bereich $x < b$ als Funktion der noch unbekannten Kraft N.

b.) die Kraft N und

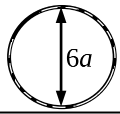
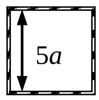
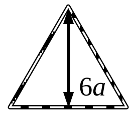
c.) die Erhöhung f am Balkenende als Funktion von ΔT.



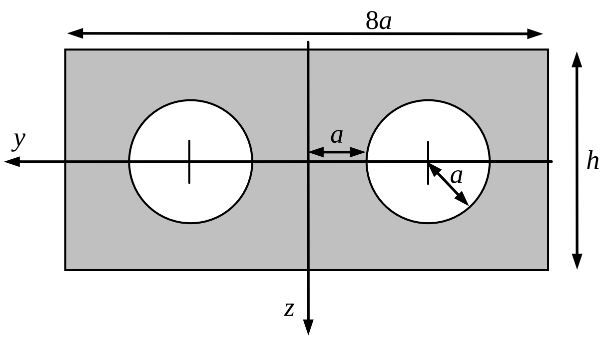
Aufgabe 2-14: Ein Verbindungsstück besteht aus zwei starren kreisrunden Kopfplatten, die durch fünf Rundstangen (Länge l, Radius r , Emodul E und Schubmodul G) fest miteinander verbunden sind. Die Achsen der Rundstangen haben jeweils den Abstand R von der Achse der Kopfplatten. Berechnen Sie die Torsionsfederkonstante (M_T/φ) des Bauteils.



Aufgabe 2-15 : Für einen dünnwandigen (Wandstärke t) Torsions/Biegestab soll eine Profilquerschnittsform ausgewählt werden:
Entweder ein Kreis (Radius $3a$), oder ein Quadrat (Kantenlänge $5a$), oder aber ein gleichseitiges Dreieck (Höhe $6a$). Dabei sei t = 1 mm und a = 1 cm. Berechnen Sie für die Tabelle:
($\sin 60° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$)

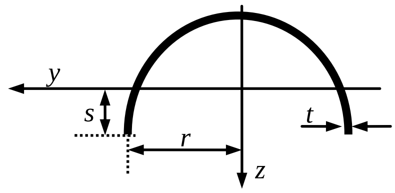
			
a.) die Querschnittsfläche in cm² :			
b.) den Profilumfang in cm:			
c.) das Torsionsträgheitsmoment I_T in cm³mm (=10^3 mm^4):			
d.) das Biege-Flächenmoment I_y in cm³mm:			

Aufgabe 2-16: Im Profil für einen rechteckigen Balken (Breite $8a$, Höhe h) sind wie skizziert zwei Bohrungen (Radius a) zum Durchleiten einer Kühlflüssigkeit vorgesehen. Wie groß muss die Höhe h gewählt werden, damit der Balken in alle Richtungen die gleiche Biegesteifigkeit EI aufweist (und das Biegedeviationsmoment verschwindet)?

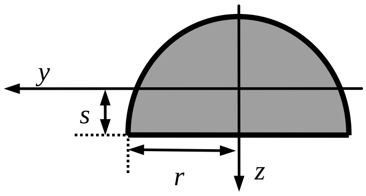


Aufgabe 2-17: Gegeben ist nebenstehendes, halbkreisförmiges, dünnwandiges Profil (Radius r, Dicke t)

a.) Ermitteln Sie das Flächenträgheitsmoment I_z.
b.) Ermitteln Sie das Torsionsträgheitsmoment I_P.
c.) Zeigen Sie die Berechnung des Schwerpunktsabstandes s.
d.) Zeigen Sie die Berechnung des Flächenträgheitsmomentes I_y.



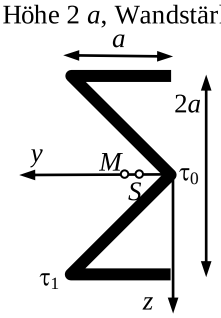
Aufgabe 2-18: Gegeben ist das gezeichnete halbkreisförmige Vollprofil.

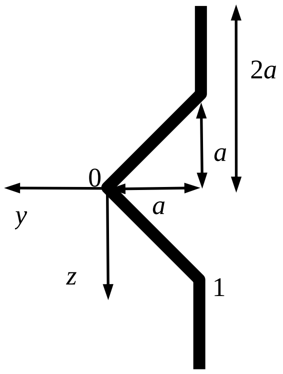


a.) Zeigen Sie die Berechnung des Schwerpunktsabstandes s.
b.) Zeigen Sie die Berechnung des Flächenträgheitsmomentes I_y.

Aufgabe 2-19: Gegeben ist nebenstehendes, dünnwandiges, Σ-förmiges Profil (Breite a, Höhe 2 a, Wandstärke t). Es wird durch eine vertikale Querkraft Q (in z-Richtung) belastet.

a.) Geben Sie den Schwerpunktabstand y_M an.
b.) Ermitteln Sie das Flächenträgheitsmoment I_y.
c.) Ermitteln Sie das Flächenträgheitsmoment I_z (bezogen auf den Flächenschwerpunkt).
d.) Berechnen Sie die Schubspannungen τ_1 in der Kante und τ_0 in der Profilmitte (im Koordinatenursprung).
e.) Zeigen Sie die Berechnung des Abstands des Schubmittelpunktes y_S.

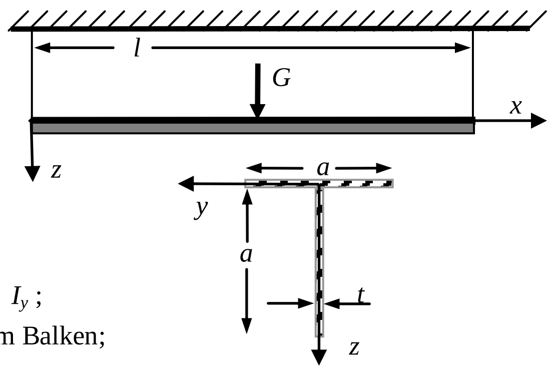




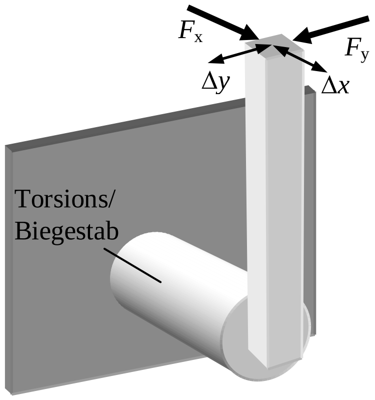
Aufgabe 2-20: Gegeben sei das links gezeichnete Balkenprofil, welches aus einem Blech der Dicke t gewalzt worden ist durch eine Querkraft Q in z-Richtung belastet wird.

a.) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmomentes I_y.
b.) Berechnen Sie die Schubspannungen in den Punkten 0, 1 und 2.
c.) Berechnen Sie die den Verlauf der Schubspannungen im Bereich zwischen 1 und 2 als Funktion der Koordinate z.
d.) Berechnen Sie die y-Koordinate des Schubmittelpunktes y_S.

Aufgabe 2-21: Ein langer Balken (Länge l) sei wie skizziert durch zwei Seile horizontal aufgehängt und mittig durch ein Gewicht G belastet. Er besteht aus zwei rechteckigen Blechstreifen (Breite a, Stärke t), die T-förmig zusammengelötet worden sind (dabei gilt $a >> t$!). Ermitteln Sie:

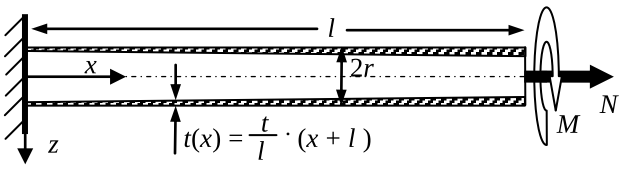


a.) die Koordinate des Flächenschwerpunkts z_S ;
b.) das (schwerpunktsbezogene) Flächenträgheitsmoment I_y ;
c.) Ort (x, z) und Größe der maximalen Zugspannung σ im Balken;
d.) die Schubspannung τ in der Lötnaht und
e.) die Durchsenkung f der Balkenmitte (Elastizitätsmodul E).



Aufgabe 2-22: An einem horizontal an der starren Wand befestigtem Torsions/Biegestab mit kreisrundem Profil ist senkrecht ein starrer Vertikalhebel befestigt (siehe Skizze). Greift nun an der Spitze dieses starren Hebels eine horizontale Kraft F_x (in x-Richtung) an, so wird durch Biegeverformung im Stab die Spitze des Hebels um Δx horizontal verschoben; greift an der Spitze eine Horizontalkraft F_y (in y-Richtung) an, so wird durch Torsionsverformung im Stab (bei Vernachlässigung der Biegeverformung in y-Richtung) die Spitze des Hebels um Δy verschoben.
Welchen Wert muss die Querkontraktionszahl ν des Stabmaterials annehmen, damit die Federsteifigkeit der Hebelspitze in x-Richtung ($F_x/\Delta x$) die gleiche ist wie die Federsteifigkeit in y-Richtung ($F_y/\Delta y$) ?

Aufgabe 2-23: Ein Rohr (Länge l, Radius r), dessen dünne Wandstärke mit der Länge linear von t auf $2t$ zunimmt, also $t(x) = (x + l) \cdot t / l$, wird gleichzeitig durch eine Zugkraft N und durch ein Torsionsmoment M belastet.

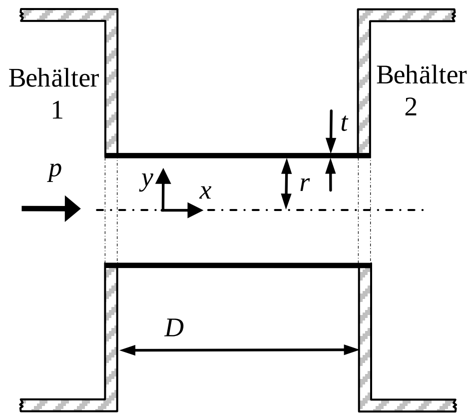


Berechnen Sie für dieses Rohr:
a.) die Normalspannung $\sigma_x(x)$;
b.) die Längenänderung Δl ;
c.) die Schubspannung $\tau_x(x)$;
d.) den Torsionwinkel $\Delta\varphi$.

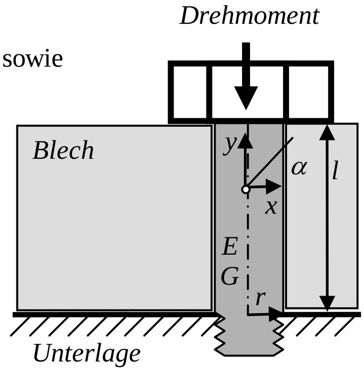
e.) Skizzieren Sie für $N = M / r$ den Mohrschen Spannungskreis und geben sie die Hauptspannungsrichtungen an.

Aufgabe 2-24: Zwei Behälter sind durch ein dünnwandiges Rohr (Wandstärke t, Radius r) miteinander verbunden. Wenn nun durch dieses Rohr eine Flüssigkeit (Überdruck p) gepumpt wird, so verformt sich das Rohr (ebener Spannungszustand, Emodul E= 206 kN/mm², Querkontraktionszahl ν = 0.3), montagebedingt bleibt aber dabei der Abstand D zwischen den Behältern konstant.

a.) Berechnen Sie für das Rohr die Normalspannungen σ_x (in axial Richtung) und σ_y (in Umfangsrichtung) sowie die Änderung des Radius Δr.
b.) Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für die Rohroberfläche und geben sie den Winkel φ und den Wert τ_φ der maximalen Schubspannungen an.
c.) Mit welcher Temperaturerhöhung ΔT müsste die Flüssigkeit durch das Rohr gepumpt werden, damit das Rohr in axialer Richtung spannungsfrei bleibt ($\sigma_x = 0$). Der Temperaturausdehnungskoeffizient sei dabei α.



Aufgabe 2-25: Durch eine Schraube (Schaftlänge ohne Gewinde *l*, Radius *r*, Emodul *E* und Schubmodul *G*) soll ein starres Blech (Dicke *l*) auf einer Unterlage befestigt werden. Dabei wird die Schraube durch Anziehen mit einem Drehmoment auf Zug (Normalkraft *N*) und Torsion (Reibmoment im Gewinde: $\mu\, r\, N$) belastet. Ermitteln Sie:



a.) die Zugspannung σ_y und die Längenänderung Δl des Schraubenschaftes sowie

b.) die maximale Torsionsspannung τ_y und den Verdrehwinkel φ;

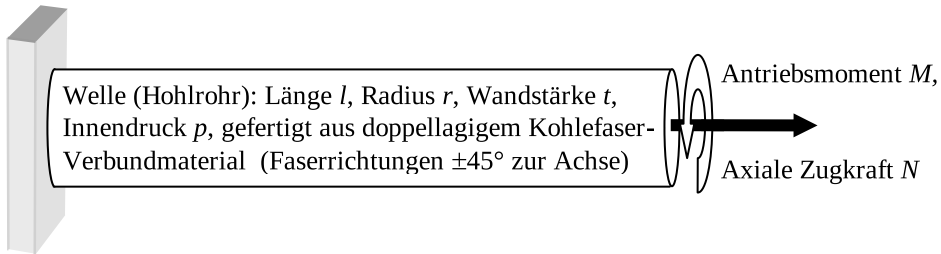
Zeichen Sie für die Oberfläche des Schraubenschaftes und den effektiven Reibwert im Schraubengewinde $\mu = 0.5$ den Mohrschen Spannungskreis und berechnen Sie:

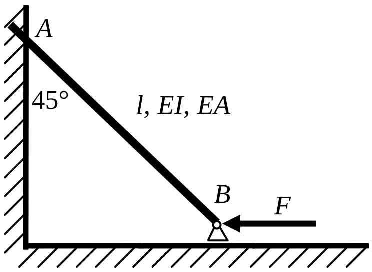
c.) den Winkel α der maximalen Zugspannung und

d.) die maximale Zug-Hauptspannung σ_1 .

Aufgabe 2-26: Für ein Weltraum-Experiment wird das Antriebsrohr einer in extremen Leichtbau aus Faserverbundmaterial gefertigten Hohlwelle durch einen regelbaren Innendruck *p* stabilisiert. Berechnen Sie:

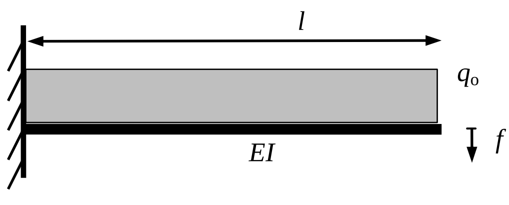
a.) in Achsrichtung die Spannungen σ und τ infolge der beiden äußeren Belastungen *N* und *M*,
b.) die Spannungen σ_x (in Achsrichtung) und σ_y (in Umfangsrichtung) infolge des Rohrinnendruckes *p*,
c.) den Innendruck *p*, für den die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 genau in Faserrichtung (45° zur Achse) verlaufen,
d.) das maximale Antriebsmoment *M*, für welches in Faserrichtung gerade noch kein Druck auftritt.



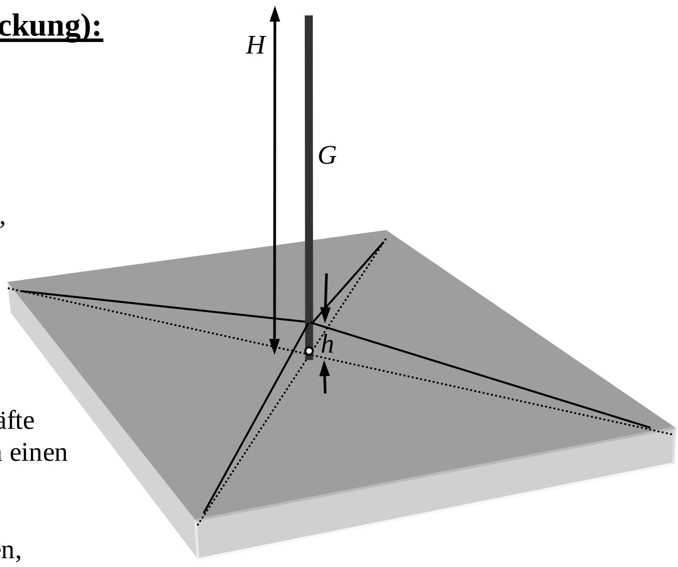


Aufgabe 2-27: Ein Balken ist wie skizziert bei *A* im Winkel von 45° fest in der Wand befestigt und bei *B* im Boden durch ein verschiebbares Gelenklager statisch unbestimmt gelagert. Er hat die Länge *l*, die Biegesteifigkeit *EI* und die Dehnsteifigkeit *EA*. Berechnen Sie mit Hilfe von Energiemethoden der Elastostatik die Verschiebung des Lagers *B* und die vertikale Lagerreaktion F_B , wenn im Lager eine Horizontalkraft *F* angreift.

Aufgabe 2-28: Berechnen Sie für den nebenstehenden, fest in der Wand eingespannten und durch eine konstante Steckenlast q_o belasteten Biegebalken (Länge *l*, Biegesteifigkeit *EI*) die Absenkung *f* am Balkenende mit Hilfe von Energiemethoden der Elastostatik.



Übungsaufgaben zum Kapitel 3 (Knickung):

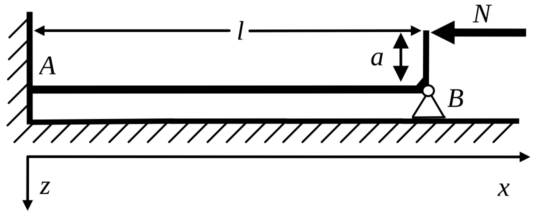


Aufgabe 3-1. Ein Antennenmast (Gewicht G, Länge H , im Boden gelenkig verankert) soll durch vier gleichartige vorgespannte Seile (Länge l, Dehnsteifigkeit EA) gestützt werden, wobei der Winkel zwischen den Seilen und dem Boden sehr klein bleibt (siehe Skizze). Die Höhe der Seilbefestigung am Mast sei h.

a.) Berechnen Sie das durch die Dehnung der Seile verursachte Rückstellmoment der Seilkräfte in der Bodenlagerung, wenn der Mast sich um einen kleinen Winkel α neigt.

b.) Wie klein kann h höchstens gewählt werden, damit der Mast nicht zwangsläufig umkippt?

Aufgabe 3-2: Gegeben ist ein statisch unbestimmt gelagerter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI), welcher bei A durch eine feste Einspannung und bei B durch ein horizontal verschiebbares Gelenklager gelagert ist. Eine horizontale Kraft N im vertikalen Abstand a leitet bei B ein Biegemoment aN ein.

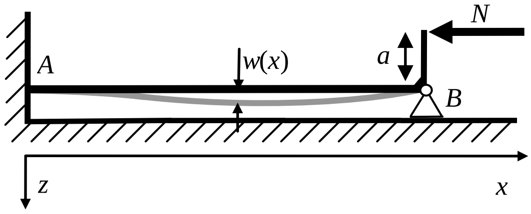


a.) Berechnen Sie den Momentenverlauf $M(x)$ als Funktion der noch unbekannten Lagerkraft F_B.

b.) Ermitteln Sie die Lagerkraft F_B durch Berechnung der Biegeverformung $w(x)$ des Balkens.

c.) An welcher Stelle x verschwindet das Biegemoment?

Betrachtet wird immer noch der statisch unbestimmt gelagerte Balken.

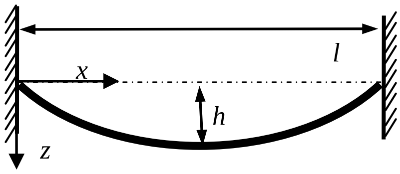


d.) Berechnen Sie jetzt den Momentenverlauf $M(x)$ als Funktion der noch unbekannten Lagerkraft F_B unter Berücksichtigung der Verformung des Balkens.

e.) Berechnen Sie die Lagerkraft F_B unter Berücksichtigung der Verformung des Balkens.

f.) Für welche Kraft $N_{kritisch}$ können auch dann noch Biegeverformungen auftreten, wenn der Hebelarm verschwindet ($a = 0$) ?

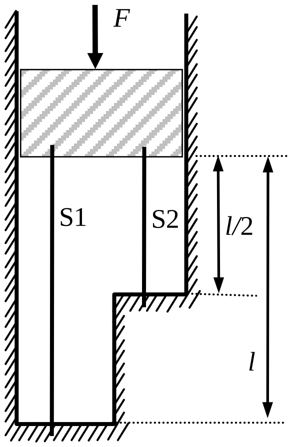
Aufgabe 3-3: Ein langer gerader Stab (Biegesteifigkeit EI) wird elastisch gebogen und danach zwischen zwei Wände (im Abstand l) eingepasst. Dabei wird von den Wänden eine Horizontalkraft N auf den Stab ausgeübt; und die maximale Durchbiegung in der Stabmitte beträgt h.



a.) Stellen Sie die Differentialgleichung der Biegelinie $w(x)$ auf.

b.) Berechnen Sie die Biegelinie $w(x)$ und die Horizontalkraft N in Stab mit Hilfe der drei Randbedingungen :

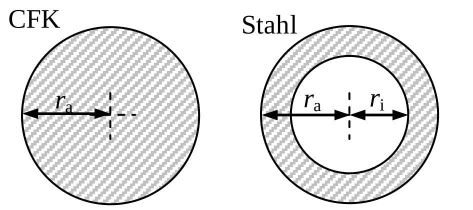
$w(0) = 0$, $w(l) = 0$ und $w(l/2) = h$.



Aufgabe 3-4: Ein Kolben könnte in einer Führung vertikal gleiten, wäre er nicht auf zwei langen, geraden Stäbe S1 und S2 (beide Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA) abgestützt (siehe Skizze). Durch die Führung bleibt die Kolbengrundfläche immer exakt horizontal. Der Stab S1 (Länge l) ist genau doppelt so lang wie der Stab S2. Da Reibung vernachlässigt werden kann und der Kolben als gewichtslos zu betrachten ist, sind die Stäbe zunächst spannungsfrei; nun aber wird auf den Kolben die Kraft F aufgebracht, und es treten in den Stäben die Kräfte S_1 und S_2 auf.

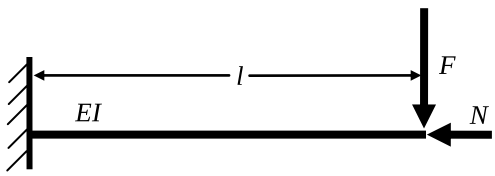
a.) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2 als Funktion von F.
b.) Welche maximale Kraft $S_{1,max}$ kann der Stab S1 in vertikaler Richtung übertragen?
c.) Auf welchen Wert F_{max} kann die Belastung F maximal gesteigert werden, bevor im Stab S2 elastisches Knicken auftritt.

Aufgabe 3-5: Für ein knickbelastetes Stabwerk könnte man entweder Vollprofil-Rundstäbe aus CFK (Emodul 88 kN/mm², Dichte 1.5 g/cm³) oder Stahlrohre (Emodul 210 kN/mm², Dichte 7.8 g/cm³) mit gleichem Außenradius r_a verwenden.

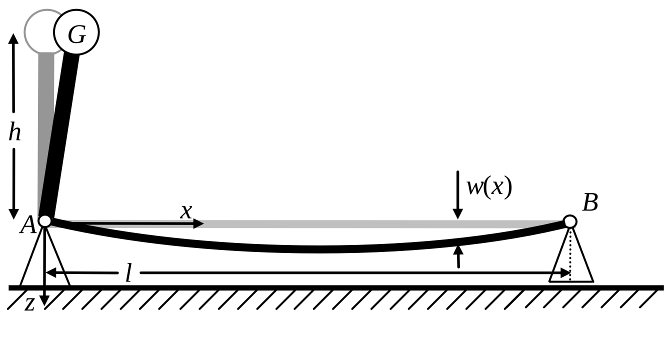


a.) Berechnen Sie für die Stahlrohre das Verhältnis Innen- zu Außen-Radius r_i/r_a für die gleiche Sicherheit gegen (Eulersches) Ausknicken.
b.) Um wieviel Prozent wird dann die Stahlrohrkonstuktion schwerer als die Carbon-Fiber CFK Konstuktion?

Aufgabe 3-6: Bestimmen Sie die Federsteifigkeit $F/w(l)$ für die Biegung eines durch eine Axialkraft N druckbelasteten Balkens (Länge l, Biegesteifigkeit EI).

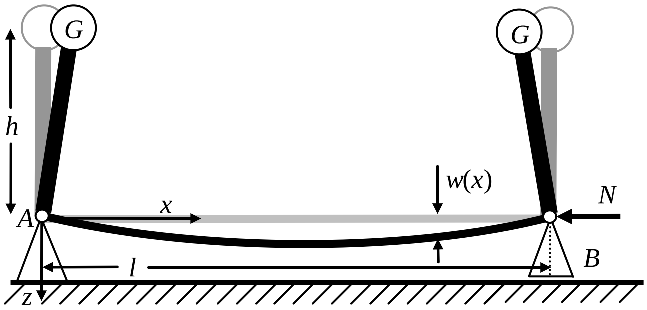


Aufgabe 3-7: Ein Gewicht G, welches oben auf einer starren Vertikalstange (Höhe h) befestigt ist, wird bei A durch ein festes Gelenklager im Boden verankert. Um die Vertikalstange senkrecht zu halten, ist an ihr rechtwinklig eine Horizontalstange befestigt (Länge l, Biegesteifigkeit EI), die bei B durch ein verschiebbares Gelenklager horizontal gehalten wird Um das Knickverhalten der Konstruktion zu untersuchen, wird die Biegelinie $w(x)$ des verformten Bauteils berechnet.



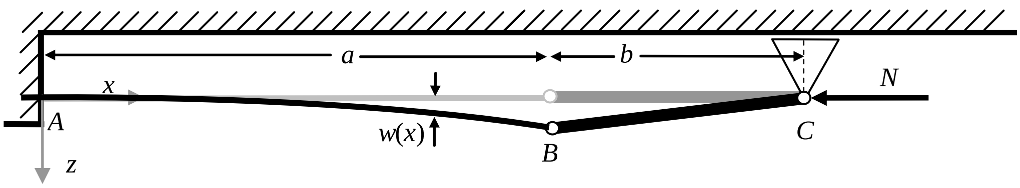
a.) Berechnen Sie mit Hilfe des Momentengleichgewichtes im Punkt A die Vertikalkraft F_B im Lager B als Funktion des Gewichtes G und der Verformung $w'(0)$ (Steigung von $w(x)$ an der Stelle $x = 0$).
b.) Geben Sie den Biegemomentenverlauf $M(x)$ in der verformten Stange als Funktion der Lagerkraft F_B an.
c.) Ermitteln Sie die Differentialgleichung der Biegelinie für die ausgeknickte Stange und passen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch die Randbedingungen $w(0) = 0$ und $w(l) = 0$ an den Spezialfall an.
d.) Ab welchem Gewicht G_{max} treten Biegeverformungen $w'(0)$ überhaupt erst auf?

Aufgabe 3-8: Zwei gleiche Gewichte G sind jeweils oben auf starren Vertikalstangen (Höhe h) befestigt, die unten durch eine rechtwinklig angebrachte Horizontalstange (Länge l, Biegesteifigkeit EI, vorgespannt durch eine Druckkraft N) miteinander verbunden sind. Dabei ist die linke Vertikalstange bei A durch ein festes Gelenklager und die rechte Vertikalstange bei B durch ein verschiebbares Gelenklager im Boden verankert. Um das Knickverhalten der Konstruktion zu untersuchen, wird die Biegelinie $w(x)$ der verformten Stange berechnet.



a.) Berechnen Sie für den Fall $N = 0$ das konstante Biegemoment M_0 in der Stange als Funktion des Gewichtes G und der Verformung $w'(0)$ (Steigung von $w(x)$ an der Stelle $x = 0$, aus Symmetriegründen gilt $w'(0) = -w(l)$).
b.) Geben Sie den Biegemomentenverlauf $M(x)$ in der verformten vorgespannten Stange an (dh. für $N \neq 0$)
c.) Ermitteln Sie die Differentialgleichung der Biegelinie für die ausgeknickte Stange und passen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch die Randbedingungen $w(0) = 0$ und $w(l) = 0$ an den Spezialfall an.
d.) Ab welchem Gewicht $G_{\max}$ treten Biegeverformungen $w'(0)$ überhaupt erst auf?

Aufgabe 3-9: Gegeben ist ein bei A fest eingespannter horizontaler Knickstab (Länge a, Biegesteifigkeit EI), dieser ist bei B gelenkig mit einer starren Stange (Länge b) verbunden, welche rechts bei C durch ein verschiebbares Gelenklager horizontal gelagert ist. Wird nun im Lager C eine ausreichend große horizontale Druckkraft N eingeleitet, so knickt der Stab aus, wobei im Gelenk B zusätzlich zu N eine vertikale Kraft V auf den ausgeknickten Stab ausgeübt wird.



a) Berechnen Sie die im Gelenk B auf den Stab übertragene Vertikalkraft V in Abhängigkeit von der Horizontalkraft N und der Durchbiegung $w(a)$.
b) Geben Sie den Biegemomentenverlauf $M(x)$ in dem verformten Stab an.
c.) Ermitteln Sie die Differentialgleichung der Biegelinie $w(x)$ der ausgeknickten Stange und passen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch die Randbedingungen $w(0) = 0$ und $w'(0) = 0$ an den Spezialfall an.
d.) Ermitteln Sie für den Fall $a = b$ die kritische Knicklast
(Hinweis die Gleichung $\tan(x) = 2x$ hat bei $x = 1.16556$ die kleinste positive Lösung größer als Null).

Aufgabe 3-10: Ein Gewicht sei auf drei Stützen (Biegesteifigkeit EI) statisch unbestimmt gelagert. Die mittlere senkrechte Stütze hat die Länge h, die beiden äußeren Stützen sind im Winkel 45° zum Boden angebracht und haben die Länge $\sqrt{2}\, h$. Bei welchem Gewicht G knicken die Stützen?